

Учебный план дисциплины.

Студенты дневного отделения изучают математику на I и II курсах. Общий объем учебных часов на дисциплину 600 часов.

Во втором семестре изучаются следующие разделы: линейная алгебра, векторный анализ, аналитическая геометрия, дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных.

Цель преподавания дисциплины: дать студентам практическую подготовку и теоретические основы по математике для успешного освоения фундаментальных, общетехнических и специальных предметов учебного курса.

Задачи изучения математики.

1. Знать основные понятия и методы исследования и решения задач читаемой дисциплины.
2. Уметь применять математические методы к решению задач; проводить конкретные расчеты в рамках выполнения аудиторных и домашних заданий.
3. Иметь представление о математической символике для выражения количественных и качественных соотношений объектов; о применении теоретических рассуждений при доказательстве теорем.

Общие рекомендации студенту по работе над курсом математики.

Самостоятельная работа над учебным материалом состоит из следующих элементов:

1. Изучение материала по лекциям.
2. Изучение материала по учебнику.
3. Выполнение еженедельных домашних заданий.
4. Выполнение контрольных домашних заданий (КДЗ).

Студент может обращаться к преподавателю для получения консультации, посещать имеющиеся факультативные занятия.

Указания к выполнению КДЗ.

1. Каждое контрольное домашнее задание должно выполняться в отдельной тонкой тетради в клетку, чернилами черного или синего цвета. Необходимо оставлять поля шириной 6 см. для замечаний преподавателя.

2. На титульном листе тетради должны быть четко написаны фамилия студента, его инициалы, название дисциплины, номер выполняемого варианта. Как правило, номер варианта задается преподавателем.

3. Решения задач нужно располагать в порядке возрастания их номеров, обязательно записывая условия каждой задачи.

4. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

5. Оформление решения задачи следует завершать словом «Ответ».

6. После получения проверенной преподавателем работы студент должен в этой же тетради исправить все отмеченные ошибки и недочеты. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ №1 «Неопределенный и определенный интеграл»

Вариант 0

I. Вычислить интегралы:

$$1. \int \frac{(1-x)^2}{x} dx$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$$

$$3. \int 2\cos^2 \frac{x}{2} dx$$

$$4. \int \frac{dx}{x^2-7}$$

$$5. \int \frac{3 \cdot 2^x}{5^x} dx$$

$$6. \int x^2 \sin(1-x^3) dx$$

$$7. \int \frac{dx}{3x-2}$$

8. $\int \sin 2x \cdot \cos 3x dx$

9. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

10. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$

II. Вычислить определённые интегралы:

1. $\int_{-2}^3 \sqrt[3]{2x} dx$

2. $\int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$; $x = 4 \sin t$

3. $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$

III. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

1. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$

2. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$

IV. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1. $y = 4 - x^2$; $y=1$

2. $\rho = 3 \cos 4\varphi$

I. Решение

$$1. \int \frac{(1-x)^2}{x} dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{x} + \frac{x^2}{x} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx - \int 2 dx + \int x dx = (\text{получили сумму табличных интегралов}) \\ = \ln|x| - 2x + \frac{x^2}{2} + c$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \int \frac{dx}{(\sqrt{3})^2-x^2} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + c$$

$$3. \int 2 \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int (1 + \cos x) dx = \int dx + \int \cos x dx = x + \sin x + c$$

$$4. \int \frac{dx}{x^2-7} = \int \frac{dx}{x^2-(\sqrt{7})^2} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \cdot \ln \left| \frac{x-\sqrt{7}}{x+\sqrt{7}} \right| + c$$

$$5. \int \frac{3 \cdot 2^x}{5^x} dx = 3 \cdot \int \left(\frac{2}{5}\right)^x dx = 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln \frac{2}{5}} + c$$

Для вычисления этих интегралов пользовались основной таблицей интегралов, формулами тригонометрии, действиями со степенями и дробями.

$$6. \int x^2 \sin(1 - x^3) dx =$$

известно, что $d(x^3) = 3x^2 dx$, тогда

$$\frac{1}{3} \int \sin(1 - x^3) dx^3 =$$

имеем свойство дифференциала $\frac{1}{a} d(ax + b) = dx$

$$\text{т.е. } -d(1 - x^3) = dx^3$$

$$-\frac{1}{3} \int \sin(1 - x^3) d(1 - x^3) = -\frac{1}{3}(-\cos(1 - x^3)) + c = \frac{1}{3} \cos(1 - x^3) + c$$

$$7. \int \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x-2)}{3x-2} = \frac{1}{3} \ln|3x-2| + c$$

$$8. \int \sin 2x \cdot \cos 3x dx =$$

имеем формулу $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$, тогда

$$\frac{1}{2} \int [\sin 5x + \sin(-x)] dx = \frac{1}{2} \int \sin 5x dx - \frac{1}{2} \int \sin x dx =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \int \sin 5x dx - \frac{1}{2} (-\cos x) = -\frac{2}{10} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos x + c$$

$$9. \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} =$$

выделим полный квадрат в знаменателе

$$x^2 + 2x + 5 = x^2 + 2x + 1^2 + 4 = (x + 1)^2 + 4$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + c$$

$$10. \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx =$$

воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU$$

$$\text{Пусть } U = \operatorname{arctg} \sqrt{x} \rightarrow dU = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$dV = dx \rightarrow V = x$$

Имеем:

$$x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \int \frac{x}{(1+x)2\sqrt{x}} dx$$

посчитаем получившийся интеграл $\int \frac{x}{(1+x)2\sqrt{x}} dx = \int \frac{(\sqrt{x})^2}{(1+(\sqrt{x})^2)2\sqrt{x}} dx =$

$$\int \frac{(\sqrt{x})^2}{1+(\sqrt{x})^2} d(\sqrt{x}), \text{ замена } \sqrt{x} = t$$

$$\int \frac{t^2}{1+t^2} dt = \int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1} dt = \int \frac{t^2+1}{t^2+1} dt - \int \frac{dt}{t^2+1} = \int dt - \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$t - \operatorname{arctg} t = \sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}$$

$$\text{Получаем: } \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx = x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + c$$

II. Вычислить определенные интегралы.

Нам понадобятся формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

и правила пользования заменой и формулой интегрирования по частям в определённом интеграле.

$$1. \int_{-2}^3 \sqrt[3]{2x} dx = \sqrt[3]{2} \int_{-2}^3 x^{1/3} dx = \sqrt[3]{2} \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} \Big|_{-2}^3 = \frac{\sqrt[3]{2} \cdot 3}{4} x^{4/3} \Big|_{-2}^3 =$$

$$\frac{3}{4} \sqrt[3]{2x^4} \Big|_{-2}^3 = \frac{3}{4} \left(\sqrt[3]{2 \cdot 3^4} - \sqrt[3]{2(-2)^4} \right) = \frac{3}{4} (3\sqrt[3]{6} - 2\sqrt{4})$$

$$2. \int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx = \begin{cases} x = 4 \sin t \\ dx = 4 \cos t dt \end{cases}; \sqrt{16-16 \sin^2 t} = \sqrt{16 \cos^2 t} = 4|\cos t|$$

т. к. $0 < t < \frac{\pi}{2}$, то $|\cos t| = \cos t$

Необходимо пересчитать пределы интегрирования

$$\left. \begin{aligned} x = 4 \rightarrow 4 = 4 \sin t, \quad \text{т. е. } t = \pi/2 \quad (\sin t = 1) \\ x = 0 \rightarrow 0 = 4 \sin t, \quad \text{т. е. } t = 0 \quad (\sin t = 0) \end{aligned} \right\}$$

$$\int_0^{\pi/2} 4 \cos t \cdot 4 \cos t dt = 16 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 8 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt =$$

$$= \left(8t + \frac{8}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = 8 \cdot \frac{\pi}{2} + 4 \sin \pi - 8 \cdot 0 - 4 \sin 0 = 4\pi$$

III. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$1. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4} =$$

Подинтегральная функция $\frac{1}{x^4}$ имеет разрыв (не определена)

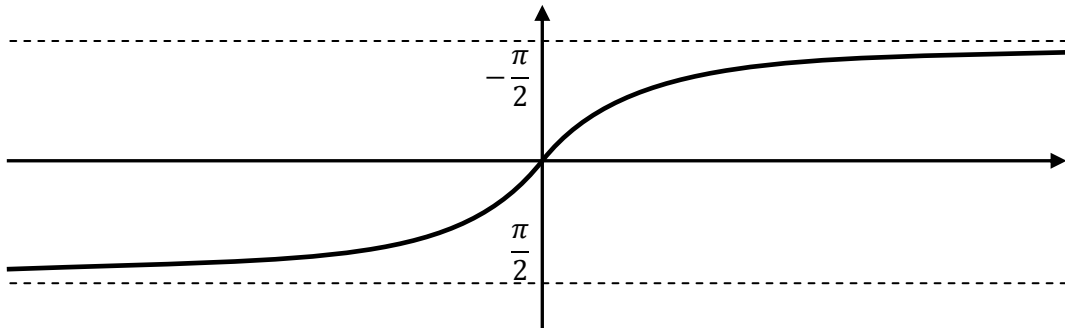
в точке $x = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^4} + \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^4} \right] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left(-\frac{1}{3x^3} \right) \Big|_{-1}^{0-\varepsilon} + \left(-\frac{1}{3x^3} \right) \Big|_{0+\varepsilon}^1 \right] = \\ &= -\frac{1}{3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(0-\varepsilon)^3} - \frac{1}{(-1)^3} + \frac{1}{(1)^3} - \frac{1}{(0+\varepsilon)^3} \right] = \\ &= -\frac{1}{3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\varepsilon^3} + 1 + 1 - \frac{1}{\varepsilon^3} \right] = \infty \end{aligned}$$

Следовательно, интеграл расходится.

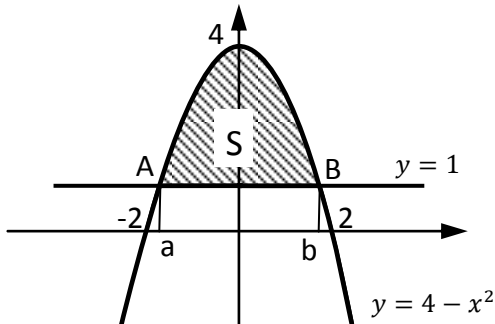
$$\begin{aligned} 2. \int_0^{\infty} \frac{dx}{4+x^2} &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right] \Big|_0^M = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{M \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg} M - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Известно, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} 0 = 0$.



III. Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями.

$$1. y = 4 - x^2; y = 1.$$



Сделаем рисунок.

Кривые заданы в декартовой системе координат, следовательно,

$$S = \int_a^b (f_1 - f_2) dx = \int_a^b (4 - x^2 - 1) dx$$

Найдем пределы интегрирования a и b . Для этого решим совместно

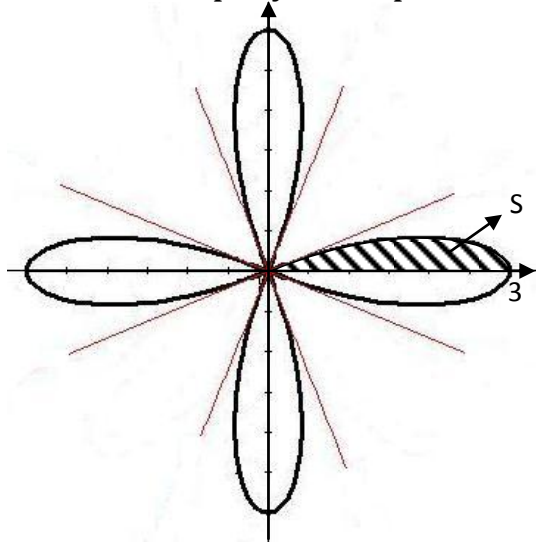
$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow 1 = 4 - x^2 \rightarrow x^2 = 3; x = \pm\sqrt{3}; a = -\sqrt{3}; b = \sqrt{3}.$$

Получаем

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3 - x^2) dx = \left(3x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3} - 3(-\sqrt{3}) + \frac{(-\sqrt{3})^3}{3} = 4\sqrt{3} \text{ (кв. ед.)}$$

2. $\rho = 3 \cdot \cos 4\varphi$

Сделаем рисунок. Кривая задана в полярных координатах.



Это известная кривая – четырехлистник, которую можно построить по точкам.

Но воспользуемся ее свойствами.

$$\rho \geq 0 \rightarrow \cos 4\varphi \geq 0$$

$$2\pi k - \frac{\pi}{2} \leq 4\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

Удобнее записать

$$\frac{4\pi k}{8} - \frac{\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{8} + \frac{4\pi k}{8}$$

Имеем 4 зоны, т.е. 4 лепестка.

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{8} & \quad \frac{7\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{9\pi}{8} \\ \frac{3\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{8} & \quad \frac{11\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{13\pi}{8} \end{aligned}$$

Воспользуемся симметричностью этих лепестков. Тогда вся площадь $S = 8 \cdot S_1$, где S_1 – заштрихованная площадь.

Здесь φ меняется в интервале $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$. Имеем:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{8}} (3 \cos 4\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{8}} 9 \cos^2 4\varphi d\varphi = \\ &= \frac{9}{2} \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^2 4\varphi d\varphi = \frac{9}{4} \int_0^{\frac{\pi}{8}} (1 + \cos 8\varphi) d\varphi = \frac{9}{4} \left(\varphi + \frac{1}{8} \sin 8\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \\ &= \frac{9}{4} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{8} \cdot 0 - 0 - \frac{1}{8} \cdot 0 \right) = \frac{9\pi}{32}; \text{ Тогда } S = 8 \cdot S_1 = 8 \cdot \frac{9\pi}{32} = \frac{9\pi}{4} \text{ (кв. ед.)} \end{aligned}$$

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №1

I. Вычислить определенные интегралы.

Вариант 1

1. $\int \frac{dx}{10-x^2};$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}};$

3. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2} dx;$

4. $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx;$

5. $\int \frac{x^2-4}{x+2} dx;$

6. $\int x^4 \cdot e^{(-x)^5} dx;$

7. $\int \sin^3 x \cos x dx;$

8. $\int \cos 3x \cos x dx;$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+1}};$

10. $\int \arccos x dx.$

Вариант 2

1. $\int \left(\frac{3}{\sin^2 x} + \cos x \right) dx;$

2. $\int 5^x \cdot 6^x dx;$

3. $\int \left(\frac{1-3x}{x} \right)^2 dx;$

4. $\int \frac{dx}{8-x^2};$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{5+x^2}};$

6. $\int \frac{5+2 \ln x}{3x} dx;$

7. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx;$

8. $\int \sin 8x \cdot \sin 10x dx;$

9. $\int \frac{dx}{x^2-7x+13};$

10. $\int x \sin 2x dx.$

Вариант 3

1. $\int (3x+1)^2 dx;$

2. $\int \frac{dx}{3+2x^2};$

3. $\int (3e^x - \sqrt{x^5} + 2) dx;$

4. $\int (\sin^2 x + \cos^2 x) dx;$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}};$

6. $\int \frac{2^x}{4^x-1} dx;$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{\arcsin x(1-x^2)}};$

8. $\int \cos^3 5x dx;$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}};$

10. $\int \operatorname{arcctg} \frac{x}{2} dx.$

Вариант 4

1. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

2. $\int \frac{1-x^3}{x^2+x+1} dx$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

4. $\int \frac{dx}{10x^2-7}$

Вариант 5

1. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{2}} dx$

2. $\int \frac{1+x \cos x}{x} dx$

3. $\int \frac{dx}{10x^2-1}$

4. $\int \frac{5^x}{10^x} dx$

Вариант 6

1. $\int \sqrt[7]{x^5} dx$

2. $\int \frac{3-\sqrt{5+x^2}}{5+x^2} dx$

3. $\int \frac{x^2+5x+6}{x+3} dx$

4. $\int \frac{3 \sin 2x}{\cos x} dx$

5. $\int 2^{x+1} \cdot dx$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{13-x^2}}$

6. $\int \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) dx$

6. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$

6. $\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x} dx$

7. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[7]{\sin^2 x}} dx$

7. $\int x^2 \sqrt{1-x^3} dx$

7. $\int x e^{-x^2} dx$

8. $\int \frac{x dx}{x^4+4}$

8. $\int e^{\operatorname{arctg} x} \frac{dx}{1+x^2}$

8. $\int \frac{dx}{4-x^2-4x}$

9. $\int \cos \frac{x}{3} \cdot \sin \frac{2x}{3} dx$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$

9. $\int \sin x \cdot \cos 8x \cdot dx$

10. $\int x \cos x dx$

10. $\int (x+1) \ln x dx$

10. $\int x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot dx$

Вариант 7**Вариант 8****Вариант 9**

1. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

1. $\int (2x-3)^2 dx$

1. $\int \left(\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx$

2. $\int \frac{x e^x - x}{x} dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+25}}$

2. $\int 3^{x+1} dx$

3. $\int \frac{x^2+2}{x^2+1} dx$

3. $\int \frac{2 \operatorname{tg}^2 x + 1}{\sin^2 x} dx$

3. $\int \frac{dx}{4x^2-1}$

4. $\int \left(2^x + \frac{1}{1-x^2}\right) dx$

4. $\int (2^x - 2 \cdot 3^x) dx$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}$

5. $\int \frac{(2+x)^2}{\sqrt{x}} dx$

5. $\int \frac{1-2x}{\sqrt[5]{x^3}} dx$

5. $\int \frac{2x^5-3x}{x^2} dx$

6. $\int \frac{2x dx}{\sqrt{x^2+2}}$

6. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}$

6. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

7. $\int \frac{\ln^5(x+1)}{x+1} dx$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sin^2 \sqrt{x}}$

7. $\int \cos(3-x) dx$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}$

8. $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

9. $\int \sin 7x \cdot \sin 3x \cdot dx$

9. $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$

9. $\int \cos 3x \cdot \cos 11x \, dx$

10. $\int (2x - 1) e^x \, dx$

10. $\int (1 - x) \ln x \, dx$

10. $\int x e^{3x} \, dx$

Вариант 10**Вариант 11****Вариант 12**

1. $\int \frac{3\sqrt{x-x^2}+1}{x} \, dx$

1. $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 \, dx$

1. $\int 6x \sqrt[4]{x^3} \, dx$

2. $\int \frac{1+\sin^2 x}{1-\cos 2x} \, dx$

2. $\int \frac{dx}{x^2+10}$

2. $\int \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{7\sin^2 x} \, dx$

3. $\int \frac{dx}{15+x}$

3. $\int \frac{dx}{x^2+10}$

3. $\int \frac{dx}{7-x^2}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$

4. $\int e^x \cdot 3^x \, dx$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$

5. $\int 5^{2x-1} \, dx$

5. $\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx$

5. $\int \frac{x \cdot 2^x - 1}{x} \, dx$

6. $\int \frac{\cos x}{\sin x - 1} \, dx$

6. $\int \sin(9x + 2) \, dx$

6. $\int \cos x \sqrt[3]{\sin x} \, dx$

7. $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{1-x^3}} \, dx$

7. $\int \sin^3 x \, dx$

7. $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

8. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

8. $\int \frac{dx}{2-6x-9x^2}$

9. $\int \sin 4x \cdot \sin 5x \, dx$

9. $\int \sin \frac{7x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \, dx$

9. $\int \cos \frac{10x}{11} \cdot \sin \frac{x}{11} \, dx$

10. $\int (x + 2) \cos x \, dx$

10. $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

10. $\int (2x + 1) \ln x \, dx$

Вариант 13

1. $\int \frac{dx}{8-x^2}$
2. $\int 2^{4x} dx$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+x^2}}$
4. $\int \frac{3+2ctg^2x}{\cos^2x} dx$
5. $\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt[3]{x}} dx$
6. $\int \frac{\arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}} dx$
7. $\int \frac{dx}{x \ln^3x}$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$
9. $\int \sin^3x dx$
10. $\int x3^x dx$

Вариант 14

1. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2x \cos^2x} dx$
2. $\int \frac{dx}{x^2-16}$
3. $\int \frac{x \sin x - 1}{x} dx$
4. $\int 7^{x+2} dx$
5. $\int \frac{2dx}{\sqrt{2-x^2}}$
6. $\int \frac{x dx}{\cos^2x^2}$
7. $\int (3x-2)^{\frac{1}{3}} dx$
8. $\int \frac{dx}{x^2+4x-2}$
9. $\int \sin x \cdot \sin 10x dx$
10. $\int x \sin 3x dx$

Вариант 15

1. $\int \frac{(2x-1)^2}{x^2} dx$
2. $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$
3. $\int \frac{x^2+4}{x^2-1} dx$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{10+x^2}}$
5. $\int 3e^{x-1} dx$
6. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
7. $\int \frac{dx}{x \ln^3x}$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$
9. $\int \cos 4x \cdot \cos 3x dx$
10. $\int \arcsin 2x dx$

Вариант 16

1. $\int 5^{2x} dx$
2. $\int (\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2 dx$
3. $\int \frac{dx}{4-x^2}$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

Вариант 17

1. $\int e^x \left(e^{-x} + \frac{x^2}{e^x} \right) dx$
2. $\int \frac{7dx}{\sin^2x}$
3. $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2x} dx$
4. $\int \frac{1+\sin^2x}{1-\cos 2x} dx$

Вариант 18

1. $\int \frac{2^x}{10^x} dx$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$
3. $\int \left(2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} \right) dx$
4. $\int tg^2 x dx$

5. $\int \frac{(1-x)^3}{x^3} dx$

6. $\int \frac{5+3\ln x}{x} dx$

7. $\int \frac{dx}{\arctg x \cdot \sqrt{1+x^2}}$

8. $\int \frac{dx}{x^2-8x+11}$

9. $\int \sin 7x \cdot \sin 10x dx$

10. $\int x \cdot \sin 4x dx$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$

6. $\int x\sqrt{1-x^2} dx$

7. $\int \frac{x^2 dx}{x^3+5}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-2-x^2}}$

9. $\int \cos^3 x dx$

10. $\int \arcsin 3x dx$

5. $\int \frac{dx}{2x^2-1}$

6. $\int \cos^3 x \sin x dx$

7. $\int 3e^{3x^2-1} \cdot x dx$

8. $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$

9. $\int \cos \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{3} dx$

10. $\int x \cos 2x dx$

Вариант 19

1. $\int \frac{dx}{6-x^2}$

2. $\int \frac{dx}{6+x^2}$

3. $\int \frac{2\cos 2x}{\sin^2 x - \cos^2 x} dx$

4. $\int \frac{x^2-3x+2}{x-1} dx$

5. $\int e^{3x+1} dx$

6. $\int x(x^2+5)^7 dx$

7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$

Вариант 20

1. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

2. $\int (\sqrt{x-1})^3 dx$

3. $\int \frac{x^2+3}{x^2+2} dx$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$

5. $\int \frac{dx}{3-x^2}$

6. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{3-5e^{2x}}}$

7. $\int \sin^5 x \cdot \cos x dx$

8. $\int \frac{dx}{4-x^2-4x}$

Вариант 21

1. $\int \frac{1-5x}{3\sqrt[3]{x^2}} dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{17-x^2}}$

3. $\int \frac{dx}{x^2+16}$

4. $\int (2^x - 3 \cdot 3^x) dx$

5. $\int \frac{3\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\cos^2 x} dx$

6. $\int \frac{dx}{\arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}}$

7. $\int \frac{dx}{x(\ln x + 5)}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}$

9. $\int \frac{dx}{\sin^4 8x}$

9. $\int \sin 2x \cdot \cos 5x dx$

9. $\int \cos 4x \cdot \cos 2x dx$

10. $\int x \cdot \ln(2x - 1) dx$

10. $\int 3x \cdot \operatorname{arctg} x dx$

10. $\int x e^{1-x} dx$

Вариант 22**Вариант 23****Вариант 24**

1. $\int (\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2})^2 dx$

1. $\int \frac{dx}{9-x^2}$

1. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^7}}$

2. $\int \frac{dx}{3+x^2}$

2. $\int 7^{x+2} dx$

2. $\int e^x \cdot 3^x dx$

3. $\int 2x \left(3 + \frac{3^x}{x}\right) dx$

3. $\int \frac{3^{\sqrt[3]{x}-x^3+2}}{x} dx$

3. $\int \frac{dx}{11-x^2}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{5+x^2}}$

4. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{11-x^2}}$

5. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

5. $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$

6. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{3-x^6}}$

6. $\int \frac{(\sqrt{x-1}+2)^3}{\sqrt{x-1}} dx$

6. $\int 5^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

7. $\int \frac{(3\ln x - 5)^2}{x} dx$

7. $\int \frac{dx}{x(\ln x + 7)}$

7. $\int \cos^7 x \cdot \sin x dx$

8. $\int \frac{dx}{2x^2 - 6x + 3}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}$

8. $\int \frac{dx}{4x^2 + x + 5}$

9. $\int \sin 2x \cdot \cos 12x dx$

9. $\int \cos x \cdot \sin 7 dx$

9. $\int \sin^3 2x dx$

10. $\int (2x - 1) \ln x dx$

10. $\int (2x - 1) e^{2x-1} dx$

10. $\int 3x \cdot \sin 3x dx$

Вариант 25

1. $\int \frac{x^2 - 5x + 3}{\sqrt{x}} dx$

6. $\int e^{1/x} \frac{dx}{x^2}$

2. $\int \frac{3 - 2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$

7. $\int \frac{dx}{(2x-1) \cdot \ln(2x-1)}$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{14-x^2}}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

4. $\int \frac{dx}{4-x}$

9. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$

5. $\int \frac{dx}{10-x^2}$

10. $\int 2x \cdot \arcsin 3x dx$

II. Вычислить определенные интегралы.**Вариант 1**

а) $\int_0^2 x(3-x) dx;$

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}; \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t;$

в) $\int_0^1 x e^{-2x} dx.$

Вариант 2

а) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{1+x^2} dx;$

б) $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x} dx}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}; e^x = t;$

в) $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx.$

Вариант 3

а) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3};$

б) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}; 2x+1 = t^2;$

в) $\int_0^{\pi} x \sin 2x dx.$

Вариант 4

а) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}};$

б) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}; \sqrt{x} = t;$

в) $\int_0^1 x e^{2x} dx.$

Вариант 5

а) $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1};$

б) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx; x = 2 \sin t;$

в) $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx.$

Вариант 6

а) $\int_2^6 \sqrt{x-2} dx;$

б) $\int_0^1 \frac{\sqrt{3e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} dx; e^x = t;$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + 3) \cos x dx.$

Вариант 7

$$\text{a) } \int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}; \quad \text{б) } \int_3^4 \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx; \quad \sqrt{x-2} = t; \quad \text{в) } \int_0^1 x3^x dx.$$

Вариант 8

$$\text{a) } \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}; \quad \text{б) } \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin^2 x}; \quad \text{ctg } x = t; \quad \text{в) } \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx.$$

Вариант 9

$$\text{a) } \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{б) } \int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{\sqrt[3]{(x-2)^2+3}} dx; \quad x-2 = t; \quad \text{в) } \int_0^{\pi} (x-3) \sin x dx.$$

Вариант 10

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}; \quad \text{б) } \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}+2}; \quad x+1 = t^2; \quad \text{в) } \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx.$$

Вариант 11

$$\text{a) } \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}; \quad \text{б) } \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}; \quad \sqrt{x} = t; \quad \text{в) } \int_0^3 x \operatorname{arctg} x dx.$$

Вариант 12

$$\text{a) } \int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}; \quad \text{б) } \int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}; \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t; \quad \text{в) } \int_1^3 \ln x dx.$$

Вариант 13

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{1+x^2} dx; \quad \text{б) } \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx; \quad e^x-1 = t^2; \quad \text{в) } \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx.$$

Вариант 14

$$\text{a) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx; \quad \text{б) } \int_0^7 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}; \sqrt[3]{x+1} = t; \quad \text{в) } \int_1^e x \ln x dx.$$

Вариант 15

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}; \quad \text{б) } \int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}; \sqrt{x} = t; \quad \text{в) } \int_0^1 (3x+5)e^{2x} dx.$$

Вариант 16

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx; \quad \text{б) } \int_0^3 \frac{\sqrt{x+1} dx}{\sqrt{x+1}+1}; x+1 = t^2; \quad \text{в) } \int_1^e (3-2x) \ln x dx.$$

Вариант 17

$$\text{a) } \int_1^3 \frac{dx}{(2x-1)^2}; \quad \text{б) } \int_0^1 \sqrt{9-x^2} dx; x = 3 \sin t; \quad \text{в) } \int_e^{e^2} \ln(2x) dx.$$

Вариант 18

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \cos^2 x}; \operatorname{tg} x = t; \quad \text{в) } \int_0^{e-2} x \ln(x+2) dx.$$

Вариант 19

$$\text{a) } \int_0^1 \sqrt{2+x} dx; \quad \text{б) } \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx; e^x-1 = t^2; \quad \text{в) } \int_0^{\sqrt{2}/2} \arccos x dx.$$

Вариант 20

$$\text{a) } \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx; \quad \text{б) } \int_{-4}^4 \sqrt{16-x^2} dx; x = 4 \sin t \quad \text{в) } \int_{2\pi}^{3\pi} x \sin x dx.$$

Вариант 21

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^5 x \, dx; \quad \text{б) } \int_0^{26} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2+3}} \, dx; \quad \text{в) } \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x \, dx;$$

$$x+1 = t^{\frac{3}{2}}$$

Вариант 22

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{x+3}-1}; \quad \sqrt{x+3} = t; \quad \text{в) } \int_0^e \ln^2 x \, dx.$$

Вариант 23

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{dx}{7+5x}; \quad \text{б) } \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} \, dx; \quad e^x-1 = t^2; \quad \text{в) } \int_0^{\sqrt{2}/2} \arccos x \, dx.$$

Вариант 24

$$\text{a) } \int_2^3 \left(x + \frac{1}{x^3}\right) \, dx; \quad \text{б) } \int_0^5 \sqrt{25-x^2} \, dx; \quad x = 5 \sin t; \quad \text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1) \cos x \, dx.$$

Вариант 25

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \frac{x}{2} \, dx; \quad \text{б) } \int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}; \quad \sqrt[4]{x} = t; \quad \text{в) } \int_1^e (2x-1) \ln x \, dx$$

III. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.**Вариант 1**

$$\text{a) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4};$$

$$\text{б) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}.$$

Вариант 2

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{5+2x^2}.$$

Вариант 3

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{9+2x^2}.$$

Вариант 4

$$a) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^6};$$

$$б) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}.$$

Вариант 5

$$a) \int_0^2 \frac{dx}{x^3};$$

$$б) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4 + 3x^2}.$$

Вариант 6

$$a) \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2};$$

$$б) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$$

Вариант 7

$$a) \int_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2};$$

$$б) \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$$

Вариант 8

$$a) \int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2};$$

$$б) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}.$$

Вариант 9

$$a) \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}};$$

$$б) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$$

Вариант 10

$$a) \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^4};$$

$$б) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}.$$

Вариант 11

$$a) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2};$$

$$б) \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4x^2 + 1}.$$

Вариант 12

$$a) \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2};$$

$$б) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}.$$

Вариант 13

$$a) \int_0^1 \ln x dx;$$

$$б) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{9x^2 + 4}.$$

Вариант 14

$$a) \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^4};$$

$$б) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 17}.$$

Вариант 15

$$a) \int_{-3}^3 \frac{dx}{x^2};$$

$$б) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}.$$

Вариант 16

$$a) \int_0^2 \frac{dx}{1-x};$$

$$б) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{3x^2+4}.$$

Вариант 17

$$a) \int_0^1 \ln(x-1) dx;$$

$$б) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{8+9x^2}.$$

Вариант 18

$$a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}};$$

$$б) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+13}.$$

Вариант 19

$$a) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}};$$

$$б) \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{5x^2+3}.$$

Вариант 20

$$a) \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$б) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10}.$$

Вариант 21

$$a) \int_{-2}^0 \frac{dx}{(x+1)^2};$$

$$б) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+10}.$$

Вариант 22

$$a) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}};$$

$$б) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

Вариант 23

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+x+1};$$

$$б) \int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^3}.$$

Вариант 24

$$a) \int_0^{+4} \frac{dx}{x \ln(x+1)};$$

$$б) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5 dx}{3x^2+5}.$$

Вариант 25

$$a) \int_{-\infty}^0 \frac{3 dx}{5x^2+4};$$

$$б) \int_{-3}^3 \frac{dx}{(x+3)^2}.$$

III. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями.

IV.

1. а) $y^2 = 2x + 1;$
 $x - y - 1 = 0.$ б) $\rho = e^{4\varphi}; \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$
2. а) $y = x^2;$
 $y = \sqrt{x}.$ б) $\rho = 2\varphi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$
3. а) $y = x^2;$
 $y = \frac{x^3}{3}.$ б) $\rho = \frac{2}{\varphi}; \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$
4. а) $y = e^x;$
 $y = e^{-x}; \quad x = 1.$ б) $\rho = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi.$
5. а) $y = \ln x;$
 $y = \ln^2 x.$ б) $\rho = \sin 6\varphi.$
6. а) $y = x^2 + 4x;$
 $y = x + 4.$ б) $\rho = 3 \sin 2\varphi.$
7. а) $y = \frac{1}{1 + x^2};$
 $y = \frac{x^2}{2}.$ б) $\rho = 3 \sin \varphi.$
8. а) $y = 4x^2;$
 $y = \frac{x^2}{9}. \quad y = 2$ б) $\rho = \sqrt{3} \cos \varphi.$
9. а) $y = x^2 + 1;$
 $y + x = 3.$ б) $\rho = \frac{1}{2} + \cos \varphi.$
10. а) $y = 2^x; \quad x = 2;$
 $y = 2x - x^2. \quad x = 0$ б) $\rho = \sin \varphi.$

11. a) $y = (x - 4)^2;$
 $y = 16 - x^2; y = 0.$ б) $\rho = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi.$
12. a) $y = 4x - x^2;$
 $y = 0.$ б) $\rho = \cos^3\frac{\varphi}{3}; \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$
13. a) $y = \ln x;$
 $y = 0; \quad x = e.$ б) $\rho = \varphi^2; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$
14. a) $y = x^3; \quad y = 0;$
 $x = 1; \quad x = 8.$ б) $\rho = 2 + \cos\varphi.$
15. a) $y = 2x - x^2;$
 $y = -x$ б) $\rho = 2(1 + \cos\varphi).$
16. a) $y = x^3;$
 $y = 8; \quad x = 0.$ б) $\rho = 4\sin^2\varphi.$
17. a) $y = 3 - 2x;$
 $y = x^2.$ б) $\rho = \frac{5}{\varphi}; \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq 2\pi.$
18. a) $y = x^2;$
 $y = \frac{x^2}{2}; \quad y = 2.$ б) $\rho = 3e^{3\varphi}; \quad -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$
19. a) $y = \frac{x^3}{3};$
 $y = 4 - \frac{2}{3}x^2.$ б) $\rho = 4\sin 3\varphi.$
20. a) $y = \frac{1}{x^2}; \quad y = 0;$
 $x = 1; \quad x = 4.$ б) $\rho = 1 - \cos\varphi.$
21. a) $y = x^2 + 1; y = 0$
 $x = -2; \quad x = 3.$ б) $\rho = 3\cos 2\varphi.$

22. a) $y = 3x - x^2;$
 $y = -x.$

б) $\rho = 2 + \cos\varphi.$

23. a) $y = \frac{16}{x^2};$
 $y = 17 - x^2;$
 $x > 0; y > 0.$

б) $\rho = 5\sin 2\varphi.$

24. a) $y = \sin x;$
 $y = \cos x;$
 $x = 0.$

б) $\rho = 2e^\varphi; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$

25. a) $y = 0,25x^2;$
 $y = 3x - 0,5x^2.$

б) $\rho = 3\varphi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ №2
«Дифференциальные уравнения»

Вариант 0

I. Решить уравнение $x^3 y' = y(y^2 + x^2)$.

II. Найти общее решение уравнения $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$.

III. Найти общее решение уравнения:

а) $y'' = (y')^2$;

б) $y'' = 2yy'$

IV. Найти общее решение уравнения (без нахождения неопределенных коэффициентов).

а) $y''' - 5y' = 2e^{5x}$

б) $y'' + 2y'' + 26y = x \sin 3x + (x^2 - x + 3) \cos 3x$

V. Решить задачу Коши.

$$y'' - 2y' = x^2 \quad y(0) = 0 ; \quad y'(0) = 0$$

VI. Найти общее решение уравнения методом вариации произвольных постоянных.

$$y'' + y = \operatorname{tg} x$$

Решение.

I. $x^3 y''' = y(y^2 + x^2)$

Разделим обе части уравнения на x^3 , получим

$$y' = \frac{y^3 + yx^2}{x^3} \rightarrow y' = \frac{y^3}{x^3} + \frac{yx^2}{x^3} \rightarrow y' = \left(\frac{y}{x}\right)^3 + \frac{y}{x}$$

Правая часть этого уравнения есть функция отношения $\frac{y}{x}$, следовательно, это однородное уравнение.

Обозначим $\frac{y}{x} = u \rightarrow y = ux$ и $y' = u'x + u$

Имеем: $u'x + u = u^3 + u$

$u'x = u^3$ - это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx} \cdot x = u^3 \rightarrow \frac{du}{u^3} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируем:

$$-\frac{1}{2u^2} = \ln x + C. \quad \text{Подставим } u = \frac{y}{x} \rightarrow -\frac{1}{2} \frac{x^2}{y^2} = \ln x + C$$

Если константу C записать в другом виде « $\ln C$ », то общее решение будет иметь вид:

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln x + \ln C \rightarrow -\frac{x^2}{2y^2} = \ln Cx \rightarrow Cx = e^{-\frac{x^2}{2y^2}}$$

В процессе решения мы делили обе части уравнения на $x^3 \neq 0$ и $u^3 \neq 0$ и могли потерять решения $x=0$ и $u=0$ ($u=0 \rightarrow \frac{y}{x}=0 \rightarrow y=0$)

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x = 0$ не является решением; а $y = 0$ – решение, которое не входит в общий интеграл ни при каком C

Имеем ответ: $Cx = e^{-\frac{x^2}{2y^2}}; y=0.$

II. $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$

Это линейное уравнение $y' + P(x)y = Q(x)$, где $P(x) = \frac{1}{x}; Q(x) = \frac{\sin x}{x}$

Пусть $y = uv \rightarrow y' = u'v + uv'$

Имеем $u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{\sin x}{x} \rightarrow v(u' + \frac{1}{x}u) + uv' = \frac{\sin x}{x}$

1). $u' + \frac{1}{x}u = 0$ - уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x} \rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x} \rightarrow \ln u = -\ln x \rightarrow u = \frac{1}{x},$$

т.к. $-\ln x = \ln(x^{-1})$

2). $uv' = \frac{\sin x}{x}$, подставим найденное u

$$\frac{1}{x}v' = \frac{1}{x}\sin x \rightarrow v' = \sin x$$

Интегрируем $v = -\cos x + C$

Тогда $y = uv = \frac{1}{x}(-\cos x + C)$

Ответ: $y = \frac{1}{x}(-\cos x + C)$

III. а) $y' = (y')^2$

Это уравнение второго порядка, не содержащее функцию y .

Положим $y' = z(x) \rightarrow y'' = z'$

Уравнение имеет вид $z' = z^2$ - это уравнение с разделяющимися переменными. $\frac{dz}{dx} = z^2 \rightarrow \frac{dz}{z^2} = dx \rightarrow -\frac{1}{z} = x + C$.

Вернемся к y , получаем

$$z = \frac{-1}{x+C_1}; \quad y' = -\frac{1}{x+C_1}; \quad y = -\ln|x + C_1| + C_2$$

Это и будет ответом.

б) $y'' = 2y \cdot y'$

Это уравнение второго порядка, не содержащее X .

Положим $y' = p(y) \rightarrow y'' = p' \cdot p$

Имеем $p'p = 2y \cdot p \rightarrow p(p' - 2y) = 0$

1) $p = 0 \rightarrow y' = 0 \rightarrow y = C$

2) $p' = 2y \rightarrow \frac{dp}{dy} = 2y \rightarrow p = y^2 + C_1 \rightarrow y' = y^2 + C_1$

$$\frac{dy}{y^2+C_1} = dx \rightarrow \frac{1}{C_1} \operatorname{arctg} \frac{y}{C_1} = X + C_2$$

Ответ: $y=C$; $\frac{1}{C_1} \operatorname{arctg} \frac{y}{C_1} = X + C_2$

IV. а) $y''' - 5y' = 2e^{5x}$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

1) Рассмотрим однородное уравнение: $y''' - 5y' = 0$.

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни

$$k^3 - 5k = 0 \rightarrow k(k^2 - 5) = 0 \rightarrow k_1 = 0 \quad k_{2,3} = \pm\sqrt{5}$$

Следовательно,

$$y_{00} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{\sqrt{5}x} + C_3 e^{-\sqrt{5}x}$$

- общее решение однородного уравнения в случае действительных различных корней характеристического уравнения.

2) Правая часть неоднородного уравнения $f(x) = P_0(x)e^{dx} = 2e^{5x}$; $P_0(x) = 2$ - многочлен нулевой степени, $\alpha = 5$ (α - не является корнем

характеристического уравнения). Тогда $y_{\text{чн}} = A \cdot e^{5x}$ – частное решение неоднородного уравнения.

3) Найдем неопределенный коэффициент A

$$\text{Имеем } y = A \cdot e^{5x};$$

$$y' = 5A \cdot e^{5x};$$

$$y'' = 25A \cdot e^{5x};$$

$$y''' = 125A \cdot e^{5x}.$$

Подставим найденные производные в исходное уравнение

$$125A \cdot e^{5x} - 5 \cdot 5A \cdot e^{5x} = 2e^{5x} \rightarrow 100A = 2 \rightarrow A = \frac{1}{50}$$

$$y_{\text{чн}} = \frac{1}{50} e^{5x}. \text{ Известно, что } y_{0\text{н}} = y_{00} + y_{\text{чн}}$$

$$\text{Ответ: } y_{0\text{н}} = C_1 + C_2 e^{\sqrt{5}x} + C_3 e^{-\sqrt{5}x} + \frac{1}{50} e^{5x}$$

б) Найти вид общего решения уравнения

$$y'' + 2y' + 26y = x \sin 3x + (x^2 - x - 3) \cos 3x$$

1). Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 + 2k + 26 = 0 \rightarrow k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 26} = -1 \pm i\sqrt{25} = -1 \pm 5i$$

если корни характеристического уравнения комплексны $\alpha \pm \beta i$, то

$$y_{00} = e^{\alpha x} [C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x] \rightarrow y_{00} = e^{-x} [C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x]$$

2). Правая часть уравнения имеет вид:

$$f(x) = P_2(x) \cos 3x + Q_1(x) \sin 3x, \text{ где}$$

$$P_2(x) = x^2 - x - 3 \text{ - многочлен степени 2}$$

$$Q_1(x) = x \text{ - многочлен степени 1}$$

Для правой части нашего уравнения

$$y_{\text{чн}} = M_2(x) \cos 3x + N_2(x) \sin 3x,$$

здесь $M_2(x)$ и $N_2(x)$ многочлен 2-ой степени с неопределенными коэффициентами.

3) Общее решение неоднородного уравнения $y_{0\text{н}}$ есть сумма общего решения однородного уравнения y_{00} и частного решения неоднородного уравнения $y_{\text{чн}}$ $y_{0\text{н}} = y_{00} + y_{\text{чн}}$

Имеем

$$y_{0н} = e^{-x}[C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x] + (A_1 x^2 + B_1 x + C_2) \cos 3x + (A_2 x^2 + B_2 x + C_2) \sin 3x$$

V. $y'' - 2y' = x^2$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$

1) Найдем y_{00} для уравнения $y'' - 2y' = 0$

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k = 0 \rightarrow k_1 = 0; k_2 = 2$

Корни действительны и различны, следовательно,

$$y_{00} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}$$

2) Найдем $y_{чн}$, $f(x) = P_2(x)e^{\alpha x}$; $P_2(x) = x^2$ - многочлен, $\alpha = 0$.

Значит, $y_{чн} = (Ax^2 + Bx + C) \cdot e^{0x} \cdot x = (Ax^2 + Bx + C)x$

Множитель X появляется из-за того, что $\alpha = 0$ есть однократный корень характеристического уравнения.

3) Найдем коэффициенты A, B, C

$$y_{чн} = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

$$y'_{чн} = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y'''_{чн} = 6Ax + 2B$$

Подставим в уравнение $6Ax + 2B - 6Ax^2 - 4Bx - 2C = x^2$

$$\text{Отсюда: } \begin{cases} -6A = 1 \\ 6A - 4B = 0 \\ 2B - 2C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -1/6 \\ B = -1/4 \\ C = -1/4 \end{cases}$$

$$y_{0н} = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x$$

4) Чтобы решить задачу Коши, нужно найти C_1 и C_2 , воспользовавшись начальными условиями:

$$\begin{cases} y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x \\ y' = 2C_2 e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) = 2C_2 - \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{8} \\ C_2 = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Ответ: $y = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x$ - искомое решение.

VI. $y'' + y = \operatorname{tg} x$

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' + y = 0$ и найдем корни его характеристического уравнения

$$k^2 + 1 = 0 \quad k_{1,2} = \pm i$$

т.е. функции $y_1 = \cos x$ и $y_2 = \sin x$ будут частными решениями этого однородного уравнения.

2) Запишем решение неоднородного уравнения в виде:

$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$ и составим систему уравнений для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$

$$\begin{cases} C_1' \cdot y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' \cdot y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1' \cdot \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \cdot \sin x + C_2' \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

Применим метод Крамера для решения системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\Delta c_1' = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \operatorname{tg} x & \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x \cdot \sin x = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$\Delta c_2' = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = \cos x \cdot \operatorname{tg} x = \sin x$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } c_1' &= \frac{\Delta c_1'}{\Delta} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} \rightarrow C_1 = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = -\int \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x \right) dx = \\ &= -\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + \sin x + C_1^* \end{aligned}$$

$$c_2' = \frac{\Delta c_2'}{\Delta} = \sin x \rightarrow c_2 = \int \sin x dx = -\cos x + C_2^*$$

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } y_{\text{OH}} &= \left[\sin x - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + C_1^* \right] \cos x + [C_2^* - \cos x] \cdot \sin x = \\ &= C_1^* \cos x + C_2^* \sin x - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №2

I. Найти общее решение уравнения:

1. $(y + \sqrt{xy}) \cdot dx = xdy$

2. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$

3. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

4. $xy' - y = (x + y) \cdot \ln \frac{x+y}{x}$

5. $y^2 + x^2y' = xy \cdot y'$

6. $(x + 2y)dx = xdy$

7. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$

8. $xy' - y = x \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{x}$

9. $(3x^3 + 6xy^2)dx + (x^2y + 2y^3)dy = 0$

10. $(x^3 - 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0$

11. $\frac{xdx+dy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xdy-ydx}{x} = 0$

12. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) \cdot dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$

13. $(y^2 - 3x^2)dx + 2xydy = 0$

14. $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$

15. $xdy - ydx = ydy$

16. $(x^2 + xy + y^2)dx = x^2dy$

17. $(3x^2 + 6xy + 3y^2)dx - (2x^2 + 3xy)dy = 0$

18. $\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}$

19. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

20. $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$

21. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$

22. $xy' = y \cdot \ln \frac{y}{x}$

23. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$

24. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

25. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

I. Найти общее решение уравнения:

1. $xy' + 2y = 3x$
2. $xy' + 3y = x^2$
3. $y' + 2y = e^x$
4. $(1 + x^2) \cdot y' - 2xy = (1 + x^2)^2$
5. $y' + 2xy = 2x \cdot e^{-x^2}$
6. $y' \cdot \sin x - y = 1 - \cos x$
7. $y' + y \cdot \cos x = \sin x \cdot \cos x$
8. $(1 - x^2) \cdot y' + xy = 1$
9. $y' + x^2y = x^2$
10. $xy' + y = y^2 \ln x$
11. $y' + 2xy = 2x^3y^3$
12. $(1 - x^2) \cdot y' - xy = a \cdot xy^2$
13. $3y^2y' - a \cdot y^3 = x + 1$
14. $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \sec x$
15. $xy' + y = e^x$
16. $xy' - \frac{y}{x+1} = x$
17. $y' - y \cdot \operatorname{tg} x + y^2 \cdot \cos x = 0$
18. $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$
19. $(1 - 2xy) \cdot y' = y \cdot (y - 1)$
20. $xy' + (x + 1) \cdot y = 3x^2e^{-x}$
21. $(2e^y - x) \cdot y' = 1$
22. $y' = 2x \cdot (x^2 + y)$
23. $(xy' - 1) \cdot \ln x = 2y$
24. $(3y \cdot e^{3x} + 2x)dx + (e^{3x} + 5) \cdot dy = 0$
25. $y' = \frac{y}{3x} - y^2$

II. Найти общее решение уравнения:

1. а) $y'' - x = 3e^{2-5x}$;

б) $3y'' = y^{-5/3}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$

2. а) $y'' - \frac{y'}{x(2+\ln x)} = 2 + \ln x$;

б) $-2y \cdot y'' = 1 - (y')^2$

3. а) $xy'' + (y')^2 \cdot x - y' = 0$;

б) $y y'' = -\frac{1}{2}(y')^2$

4. а) $\frac{y'}{x} + y'' = 0$;

б) $y' \cdot [1 + (y')^2] = ay''$

5. а) $y'' - \frac{3+e^x}{3x+e^x} \cdot y' = 3x + e^x$;

б) $y'' \cdot y^2 - y' = 0$

6. а) $(x + \cos x) \cdot y'' - (1 - \sin x) \cdot y' = (x + \cos x)^2$;

б) $y'' = e^y$

7. а) $-(1 + e^x) \cdot y'' + e^x \cdot y' + (1 + e^x)^2 = 0$;

б) $y'' = y \cdot y'$

8. а) $y'' \cdot \operatorname{tg} x = y' + 1$;

б) $y'' y^3 + 64 = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$

9. а) $x^2 y'' = (y')^2$;

б) $2y \cdot y'' = (y')^2$

10. а) $y'' \cdot (e^x + 1) + y' = 0$;

б) $y \cdot y'' = (y')^2$

11. а) $(1 + x) \cdot y'' + y' = 0$;

б) $2y'' = 3y^2$, $y(-2) = y'(-2) = 1$

12. a) $xy'' = y' \cdot \ln \frac{y'}{x}$;
 б) $y \cdot y'' + (y')^2 = 1$
13. a) $(1 + \sin x) \cdot y'' - y' \cdot \cos x = 0$;
 б) $y'' \cdot y^3 = 1$
14. a) $2xy'' - y' = 0$;
 б) $y \cdot y'' = (y')^3 - (y')$
15. a) $xy'' + y' = 3x + 1$;
 б) $y'' = e^y \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = \sqrt{2}$
16. a) $xy'' + y' + x = 0$;
 б) $2y \cdot y'' = 1 + (y')^2$
17. a) $2xy'y'' = (y')^2 - 1$;
 б) $(y'') = y^3 \quad y(1) = 4 \quad , \quad y'(1) = \sqrt{2}$
18. a) $xy'' = y' + x \cdot \sin \frac{y'}{x}$;
 б) $y \cdot y'' + (y')^2 + 1 = 0$
19. a) $(y'')^2 = 4y'$;
 б) $y'' = 8y^3 \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 2$
20. a) $y'' = 1 + \frac{y'}{x}$;
 б) $y^3 \cdot y'' = -1 \quad y(-1) = 1 \quad , \quad y'(-1) = 1$
21. a) $(1 + x^2) \cdot y'' + (y')^2 + 1 = 0$;
 б) $y'' + \frac{2}{1-y} \cdot (y')^2 = 0$
22. a) $y'' = y'$;
 б) $y^3 \cdot y'' = y'$

23. а) $y'' + 2xy' = 0$;
 б) $y'' = 18y^3$ $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$
24. а) $y' = xy''$;
 б) $y \cdot y'' = (y')^2 + 1$
25. а) $(y'')^2 = 4(y' - 1)$;
 б) $y''y^3 = y^4 - 16$ $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$

**IV. Найти вид общего решения уравнений
 (без нахождения неопределенных коэффициентов)**

1. а) $y''' - 2y' = 5e^{2x}$;
 б) $y'' + 2y' + 5y = 2x \cdot \sin 2x$
2. а) $y''' - 3y'' + 2y' = xe^x$;
 б) $y'' + 2y' + 10y = x^3 \cdot \cos 3x$
3. а) $y''' - 9y'' + 2y' = 4e^{-4x}$;
 б) $5y'' - 6y' + 5y = x^2 \cdot \cos \frac{4}{3}x$
4. а) $y''' + 5y'' - 14y' = 2xe^{-2x}$;
 б) $y'' + 4y' + 13y = x(\sin x + \cos x)$
5. а) $y''' - 3y'' - 4y' = 5x \cdot e^{-x}$;
 б) $y'' + 4y' + 5y = (x^2 - x + 3) \cdot \cos 3x$
6. а) $y''' - 4y'' - 12y' = e^{-2x}$;
 б) $y'' + 4y' + 29y = x^2 \cos 5x$
7. а) $y''' + y'' - 12y' = 2x \cdot e^{-4x}$;
 б) $y'' - 2y' + 2y = (x + 2) \cdot \sin 3x$
8. а) $y''' - 9y'' + 8y' = 8e^{8x}$;
 б) $y'' + y = 8x \cdot \cos x$

9. a) $y''' - 6y'' + 8y' = x \cdot e^{4x}$;
б) $y'' + 9y = (x^2 + 1) \cdot \sin 3x$
10. a) $y''' + 3y'' - 4y' = 2x \cdot e^{3x}$;
б) $y'' + 4y = x^3 \cdot \cos 3x$
11. a) $y''' - 2y'' - 8y' = -e^{-2x}$;
б) $y'' + y' + y = 5x \cdot \sin x$
12. a) $y''' - 2y'' - 24y' = (x + 5) \cdot e^{6x}$;
б) $y'' - 2y' + 3y = x^2(\cos 2x + \sin 2x)$
13. a) $y''' + 2y'' - 24y' = (x - 2) \cdot e^{-2x}$;
б) $y''' + 16y = (x^3 + 1) \cdot \sin 4x$
14. a) $y''' + 4y'' - 4y' = e^{4x}$;
б) $y'' - 4y' + 8y = x \cdot \cos 2x$
15. a) $y''' + 3y'' - 4y' = x \cdot e^{-4x}$;
б) $y'' - 2y' + 26y = (x^2 + 2x - 1)\sin 5x$
16. a) $y''' - 9y'' + 8y' = 5e^{-x}$;
б) $y'' + 2y' + 5y = x^2(\cos 2x + \sin 2x)$
17. a) $y''' + 4y'' - 5y' = e^x$;
б) $y'' + 2y' + 10y = (2x + 1)\sin 3x$
18. a) $y''' + 3y'' - 28y' = 4e^{7x}$;
б) $5y'' - 6y' + 5y = x \sin \frac{4}{3}x$
19. a) $y''' + 8y'' + 15y' = 7x \cdot e^{2x}$;
б) $y'' - 4y' + 13y = (x - 1)\cos 3x$
20. a) $y''' + y'' - 2y' = e^{-2x}$;
б) $y'' - 4y' + 5y = (x^2 + 1)\sin x$

21. а) $y''' + 6y'' + 5y' = x \cdot e^{-5x}$;
 б) $y'' - 4y' + 29y = x(\sin 5x - \cos 5x)$
22. а) $y''' + 10y'' + 16y' = 1$;
 б) $y'' + 2y' + 2y = x \sin x - (x - 2) \cos x$
23. а) $y''' + 10y'' + 21y' = 4x \cdot e^{-7x}$;
 б) $y'' + y = x^2 \sin x$
24. а) $y''' + 9y'' + 20y' = 1$;
 б) $y'' + 9y = (2x - 1) \sin 2x$
25. а) $y''' + 11y'' + 28y' = -12e^{-4x}$;
 б) $y'' + 4y = 5x \cos 2x$

V. Решить задачу Коши

1. $y'' - y' = 2(1 - x)$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$
2. $y'' - y' = 2(1 - x)$; $y(0) = -1$; $y'(0) = 1$
3. $y'' - y' = 2(1 - x)$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$
4. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 2$
5. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$; $y(0) = \frac{1}{2}$; $y'(0) = 0$
6. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$; $y(0) = 0$; $y'(0) = -1$
7. $2y'' + 5y' = e^x$ $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$
8. $2y'' + 5y' = e^x$ $y(0) = 0$; $y'(0) = \frac{1}{7}$
9. $2y'' + 5y' = e^x$ $y(0) = -\frac{1}{7}$; $y'(0) = \frac{6}{7}$
10. $y'' + 2y' = e^{-2x}$ $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$
11. $y'' + 2y' = e^{-2x}$ $y(0) = 1$; $y'(0) = -\frac{1}{2}$
12. $y'' + 2y' = e^{-2x}$ $y(0) = -\frac{1}{2}$; $y'(0) = \frac{1}{2}$
13. $y'' - 3y' = 3x^2$ $y(0) = 2$; $y'(0) = \frac{2}{25}$
14. $y'' - 3y' = 3x^2$ $y(0) = 1$; $y'(0) = -\frac{2}{9}$
15. $y'' - 3y' = 3x^2$ $y(0) = \frac{1}{3}$; $y'(0) = \frac{7}{9}$
16. $y'' - 6y' = x^2 + 1$ $y(0) = 0$; $y'(0) = \frac{1}{27}$

17. $y'' - 6y' = x^2 + 1$ $y(0) = \frac{1}{8}$; $y'(0) = -\frac{2}{27}$
 18. $y'' - 6y' = x^2 + 1$ $y(0) = \frac{1}{26}$; $y'(0) = \frac{19}{108}$
 19. $y'' - 2y' = 3x$ $y(-1) = 1$; $y'(-1) = 2$
 20. $y'' - 2y' = 3x$ $y(-1) = -1$; $y'(-1) = 0$
 21. $y'' - 2y' = 3x$ $y(-1) = 0$; $y'(-1) = \frac{1}{e^2}$
 22. $y'' - 4y' = xe^{4x}$ $y(0) = \frac{1}{4}$; $y'(0) = 0$
 23. $y'' - 4y' = xe^{4x}$ $y(0) = \frac{1}{2}$; $y'(0) = -\frac{1}{16}$
 24. $y'' - 4y' = xe^{4x}$ $y(0) = 0$; $y'(0) = \frac{3}{16}$
 25. $2y'' - y' = e^{\frac{x}{2}}$ $y(1) = 0$; $y'(1) = \sqrt{e}$

VI. Найти общее решение уравнения методом вариации произвольных постоянных

- 1,2) $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$
 3,4) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$
 5,6) $y'' + y = -ctg^2 x$
 7,8) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$
 9,10) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$
 11,12) $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$
 13,14) $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$
 15,16) $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}$
 17,18) $y'' + 4y = tg 2x$
 19,20) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}(x^2 + 2x + 2)$
 21,22) $y'' + y' = \frac{1}{1+e^x}$
 23,24) $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$
 25,26) $y'' + y = \frac{1}{\cos^2 x}$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах ч. I и II –М . Айрис-пресс 2008.
2. Письменный Д.Г. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. –М.-Айрис-пресс 2007.
3. Самохин А.В. и др. Сборник задач по высшей математике ч. IV. Интегралы. Дифференциальные уравнения. – М. РИО МГТУ ГА 2005. №1448