МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Ю. И. Дементьев, В. В. Солодов

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению практических работ

для студентов II курса
направлений 230100, 09.03.01
очной формы обучения

Москва – 2015

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ (МГТУ ГА)

Кафедра высшей математики

Ю. И. Дементьев, В. В. Солодов

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению практических работ

для студентов II курса
направлений 230100, 09.03.01
очной формы обучения

Москва – 2015

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Задание 1. Дано уравнение.

1. Графически отделить корни уравнения.

2. Перенести все члены уравнения в левую часть, привести их к общему знаменателю и методом деления отрезка пополам уточнить один из корней (любой) с точностью до $0,01$.

Задание 2. Дано уравнение.

1. Графическим методом отделить корни уравнения.

2. На полученном отрезке проверить выполнение условий применения метода хорд и касательных.

3. Вычислить корни уравнения с точностью до $0,0001$.

Задание 3. Дана система уравнений.

1. Начертить кривые, отвечающие каждому из уравнений, наметить начальное приближение к решению.

2. Методом простых итераций найти решение с точностью до $0,01$.

Задание 4. Дан интеграл.

1. Вычислить интеграл по формуле трапеций для $n = 10$.

2. Вычислить интеграл по формуле Симпсона (по формуле парабол) для $n = 10$.

Вариант 0.

1. $x^2 + 2x = \dfrac{x-1}{x+1}.$

2. $2\ln(x-1) - 7 + x = 0.$

3. $\begin{cases} \sin(x - 0,6) - y = 1,6; \\ 3x - \cos y = 0,9. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,dx.$

Вариант 1.

1. $x^2 + 5x = \dfrac{x-1}{x+1}.$

2. $x^2 + e^x - 2 = 0.$

3. $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1,2; \\ 2x + \cos y = 2. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^1 \cos(x + x^3)\,dx.$

Вариант 2.

1. $x^2 - 6x = \dfrac{x+1}{x-1}.$

2. $3\ln(x+1) - 5 + x = 0.$

3. $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0,5; \\ x - \cos y = 3. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^1 \sin(x^4 + 2x^3 + x^2)\,dx.$

Вариант 3.

1. $x^2 - 5 = \dfrac{x}{x+1}.$

2. $2\sin x - \frac{1}{3} + x = 0.$

3. $\begin{cases} \sin x = 2 - 2y; \\ \cos(y-1) + x = 0,7. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^1 e^{\sin x}\,dx.$

Вариант 4.

1. $x^2 - 6 = \dfrac{2-x}{x}$.

2. $2\cos x - \frac{1}{2} + x = 0$.

3. $\begin{cases} \cos x = 1,5 - y; \\ 2x - \sin(y - 0,5) = 1. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} \sin x \, dx$.

Вариант 5.

1. $2x^2 - 5x = \dfrac{x-1}{x+1}$.

2. $\sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x}{3} = 0$.

3. $\begin{cases} \sin(x + 0,5) - y = 1; \\ \cos(y - 2) + x = 0. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^1 e^{\cos x} \, dx$.

Вариант 6.

1. $2x^2 - 3x = \dfrac{x+2}{1-x}$.

2. $2\sin(x-1) - 1 + x^2 = 0$.

3. $\begin{cases} \cos(x + 0,5) + y = 0,8; \\ \sin y = 2x + 1,6. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x \cos x^3 \, dx$.

Вариант 7.

1. $5x - x^2 = \dfrac{x-2}{x+2}$.

2. $3\cos x + x - x^2 = 0$.

3. $\begin{cases} \sin(x - 1) = 1,3 - y; \\ x - \sin(y + 1) = 0,8. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^1 \cos x^2 \, dx$.

Вариант 8.

1. $6x - x^2 = \dfrac{4-x}{x+1}$.

2. $3\log_2(x+3) - 5 + x = 0$.

3. $\begin{cases} 2y - \cos(x + 1) = 0; \\ x + \sin y = -0,4. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^1 \sin(x + x^3) \, dx$.

Вариант 9.

1. $x^2 - 7x = \dfrac{x+3}{x}$.

2. $\log_3(x-3) - 4 + x^2 = 0$.

3. $\begin{cases} \cos(x + 0,5) - y = 2; \\ \sin y = 1 + 2x. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} \cos x \, dx$.

Вариант 10.

1. $x^2 + 7x = \dfrac{x}{x+3}$.

2. $\sqrt[3]{x-2} - x^2 = 0$.

3. $\begin{cases} \sin(x + 2) - y = 1,5; \\ x + \cos(y - 2) = 0,5. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_1^2 e^{-x^2} \sin 2x \, dx$.

Вариант 11.

1. $7x + x^2 = \dfrac{3+x}{3-x}$.

2. $5\log_4(x-3) - 2 + x^2 = 0$.

3. $\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1,2; \\ 2y + \cos x = 2. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \ln(1+\cos x)\,dx$.

Вариант 12.

1. $4x - x^2 = \dfrac{3+x}{3-x}$.

2. $2^x + x^2 - 10 = 0$.

3. $\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0,5; \\ y - \cos x = 3. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int\limits_1^{2} \frac{\ln x}{x+1}\,dx$.

Вариант 13.

1. $x^2 + 5x = \dfrac{x-2}{x+1}$.

2. $3^x - 2x^2 + 5 = 0$.

3. $\begin{cases} \sin y = 2 - 2x; \\ \cos(x-1) + y = 0,7. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} e^{-x^2}\sqrt{x}\,dx$.

Вариант 14.

1. $x^2 - 6x = \dfrac{2-x}{x+1}$.

2. $2^x + 3x - 7 = 0$.

3. $\begin{cases} \cos y = 1,5 - x; \\ 2y - \sin(x-0,5) = 1. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int\limits_0^{1} \cos x^3\,dx$.

Вариант 15.

1. $x^2 + 6x = \dfrac{x}{2x-3}$.

2. $3^x - 8 + 2x = 0$.

3. $\begin{cases} \sin(y+0,5) - x = 1; \\ \cos(x-2) + y = 0. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int\limits_0^{1} \cos x^2\,dx$.

Вариант 16.

1. $x^2 - 5x = \dfrac{3x}{3-x}$.

2. $2^x + 3 - 4x^2 = 0$.

3. $\begin{cases} \cos(y+0,5) + x = 0,8; \\ \sin x = 1,6 + 2y. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$.

Вариант 17.

1. $5x - x^2 = \dfrac{6x+2}{3x}$.

2. $3\sin x + x - 2 = 0$.

3. $\begin{cases} \sin(y-1) + x = 1,3; \\ y - \sin(x+1) = 0,8. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \cos(2\sin x)\,dx$.

Вариант 18.

1. $x^2 - 3x = \dfrac{4x+1}{x}$.

2. $3\cos(x-1) - x + 2 = 0$.

3. $\begin{cases} 2x - \cos(y+1) = 0; \\ y + \sin x = -0,4. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x^2} x^2\, dx$.

Вариант 19.

1. $2x^2 = \dfrac{11-4x}{x}$.

2. $2x - 5 + e^x = 0$.

3. $\begin{cases} \cos(y+0,5) - x = 2; \\ \sin x = 2y + 1. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x \sin x^3\, dx$.

Вариант 20.

1. $x^2 = \dfrac{2x^2+4x+1}{x}$.

2. $3x - 2 + \lg(x+2) = 0$.

3. $\begin{cases} \sin(y+2) - x = 1,5; \\ y + \cos(x-2) = 0,5. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(x + x^3)\, dx$.

Вариант 21.

1. $2x^2 + 4x = \dfrac{13}{x}$.

2. $\operatorname{tg} x + x^2 - 1 = 0,\ \ |x| < 2$.

3. $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1; \\ 2x + \cos y = 2. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_1^{2} \sin x^3\, dx$.

Вариант 22.

1. $x = \dfrac{4-x^3}{x}$.

2. $\operatorname{arctg} x + x - 1 = 0$.

3. $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0,5; \\ x - \cos y = 2. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx$.

Вариант 23.

1. $2 - x^2 = \dfrac{x^2+1}{x}$.

2. $\operatorname{arctg} x - x^2 = 0,\ \ x > 0,1$.

3. $\begin{cases} \sin x = 1,6 - 2y; \\ \cos(y-1) + x = 1. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{e^x}{x}\, dx$.

Вариант 24.

1. $1 - x^2 = \dfrac{5}{x}$.

2. $\operatorname{arctg}(x+1) - x = 0$.

3. $\begin{cases} \cos x = 1,2 - y; \\ 2x - \sin(y-0,5) = 2. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2\cos x)\, dx$.

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

Решение варианта 0

Задание 1. Дано уравнение $x^2 + 2x = \dfrac{x-1}{x+1}$.

1. Для графического отделения корней уравнения начертим графики функций $y = x^2 + 2x$ и $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

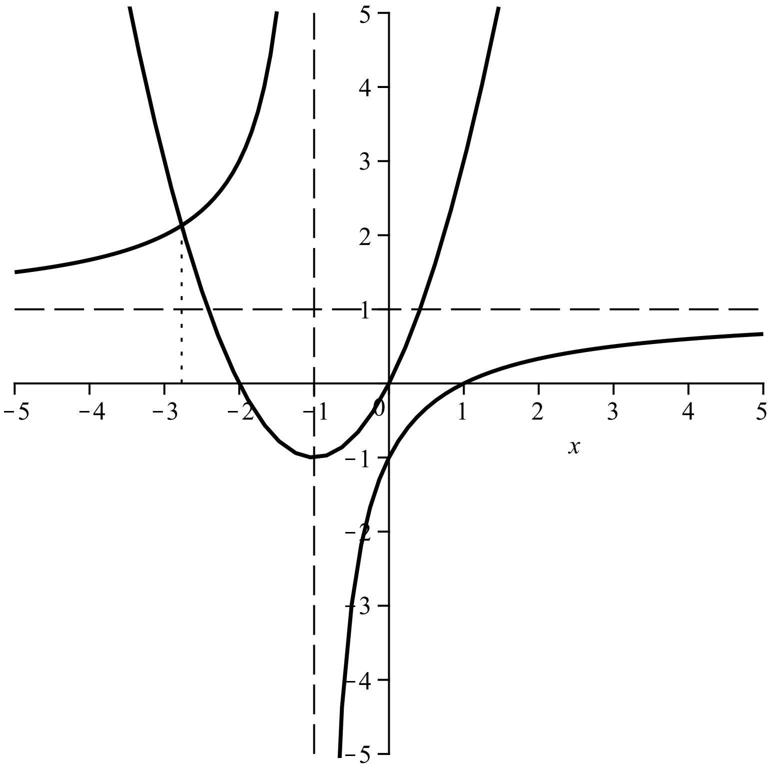

Рис. 1. Пересечение графиков функций $y = x^2 + 2x$ и $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Абсциссы точек пересечения построенных графиков отделяем отрезками так, чтобы каждый отрезок содержал только один корень. В нашем случае графики функций пересекаются только в одной точке. На рис. 1 отрезок $[-3; -2]$ отделяет этот один корень: $\xi \in [-3; -2]$.

2. В первом пункте мы отделили корень уравнения ξ. На отрезке $[-3; -2]$ расположен только один корень уравнения. Преобразуем исходное уравнение к виду:

$$(x^2 + 2x)(x + 1) = x - 1 \;\Leftrightarrow\; x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0.$$

Обозначим

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1.$$

Методом деления отрезка пополам найдём корень уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-3; -2]$ с точностью до $0,01$. Левый конец отрезка $a_0 = -3$, правый конец отрезка $b_0 = -2$.

$$f(a_0) = f(-3) = -2 < 0,\ f(b_0) = f(-2) = 3 > 0\ \Rightarrow\ f(a_0)\cdot f(b_0) = -6 < 0.$$

В качестве нулевого приближения искомого корня возьмём середину отрезка $[-3; -2]$, то есть

$$\xi_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{-3 + (-2)}{2} = -2,5.$$

Максимальная погрешность при этом равна половине длины отрезка $[-3; -2]$, то есть погрешность $\Delta = \frac{1}{2}$. Полученная погрешность превышает требуемую ($\frac{1}{2} > 0,01$), поэтому в качестве нового, более узкого отрезка $[a_1; b_1]$, отделяющего искомый корень, надо выбрать тот из отрезков $[a_0; \xi_0]$ и $[\xi_0; b_0]$, который содержит искомый корень. Нужный отрезок определяется из условия, чтобы на концах отрезка функция $f(x)$ имела разные знаки.

$$f(\xi_0) = f(-2,5) = 1,625 > 0\ \Rightarrow\ a_1 = -3,\ b_1 = -2,5.$$

В качестве первого приближения искомого корня возьмём середину отрезка $[a_1; b_1]$, то есть $\xi_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = -2,75$. Максимальная погрешность теперь равна половине длины отрезка $[a_1; b_1]$, то есть $\Delta = \frac{-2,5-(-3)}{2} = \frac{0,5}{2} = 0,25$. Так как $\Delta = 0,25 > 0,01$, то процесс сужения отрезка продолжаем аналогично до тех пор, пока максимальная погрешность не станет меньше или равна заданной погрешности.

$$f(\xi_1) = f(-2,75) = 0,141 > 0\ \Rightarrow a_2 = -3,\ b_2 = -2,75,\ \xi_2 = -2,875.$$

На данном шаге погрешность $\Delta = 0,125 > 0,01$, поэтому процесс продолжаем.

$$f(\xi_2) = f(-2,875) \approx -0,842 < 0\ \Rightarrow a_3 = -2,875\ b_3 = -2,75,\ \xi_3 = -2,813.$$

Погрешность $\Delta = 0,063 > 0,01$, поэтому продолжаем.

$$f(\xi_3) = f(-2,813) \approx -0,333 < 0\ \Rightarrow a_4 = -2,813,\ b_4 = -2,75,\ \xi_4 = -2,781.$$

Погрешность $\Delta = 0,031 > 0,01$, поэтому продолжаем далее.

$$f(\xi_4) = f(-2,781) \approx -0,087 < 0\ \Rightarrow a_5 = -2,781,\ b_5 = -2,75,\ \xi_5 = -2,766.$$

Погрешность $\Delta = 0,016 > 0,01$, поэтому продолжаем вычисления.

$$f(\xi_5) = f(-2,766) \approx 0,024 > 0\ \Rightarrow a_6 = -2,781,\ b_6 = -2,766,\ \xi_6 = -2,774.$$

Погрешность $\Delta = 0,008 < 0,01$, поэтому нужная точность достигнута и в качестве решения с заданной точностью можем взять значение $\xi_6 = -2,774$.

Вычисления удобно организовать в виде таблицы.

$$f(a_0) = f(-3) = -2 < 0, \quad f(b_0) = f(-2) = 3 > 0.$$

i	a_i	b_i	$\xi_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$	$f(\xi_i)$	Δ
0	-3	-2	$-2,5$	$1,625$	$0,5$
1	-3	$-2,5$	$-2,75$	$0,141$	$0,25$
2	-3	$-2,75$	$-2,875$	$-0,842$	$0,125$
3	$-2,875$	$-2,75$	$-2,813$	$-0,333$	$0,063$
4	$-2,813$	$-2,75$	$-2,781$	$-0,087$	$0,031$
5	$-2,781$	$-2,754$	$-2,7664$	$0,024$	$0,016$
6	$-2,781$	$-2,766$	$-2,774$	$-0,035$	$0,008$

Задание 2. Дано уравнение $2\ln(x-1) - 7 + x = 0$.

1. Преобразуем уравнение к виду

$$\ln(x-1) = \frac{7-x}{2}.$$

Начертим графики левой и правой частей уравнения.

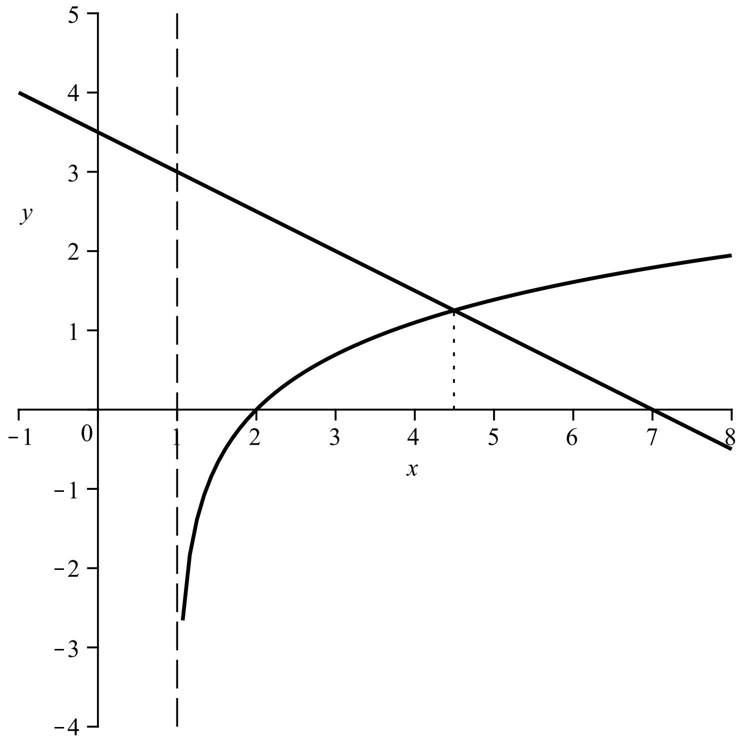

Рис. 2. Пересечение графиков функций $y = \ln(x-1)$ и $y = \dfrac{7-x}{2}$.

Одна функция возрастающая, другая — убывающая, значит, имеется единственный корень уравнения (см. рис. 1). Абсцисса точки пересечения построенных графиков отделяется отрезком $[4; 5]$. Получаем, что корень уравнения $\xi \in [4; 5]$.

2. Обозначим $f(x) = 2\ln(x-1) - 7 + x$.

Проверим выполнение условий метода хорд и касательных. Надо проверить 3 условия:

1) на концах отрезка $[4; 5]$ функция $f(x) = 2\ln(x-1) - 7 + x$ принимает значения разных знаков;

2) на рассматриваемом отрезке $[4;5]$ первая производная $f'(x)$ сохраняет знак;

3) на рассматриваемом отрезке $[4;5]$ вторая производная $f''(x)$ сохраняет знак.

Обозначим $a_0 = 4$, $b_0 = 5$.

$$f(a_0) = f(4) \approx -0,803 < 0 \quad f(b_0) = f(5) \approx 0,773 > 0.$$

На концах отрезка $[4;5]$ функция $f(x)$ принимает значения разных знаков.

$$f'(x) = (2\ln(x-1) - 7 + x)' = \frac{2}{x-1} + 1 > 0 \text{ при } x \in [4;5].$$

Перая производная положительна на рассматриваемом отрезке.

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{2}{x-1} + 1\right)' = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0 \text{ при } x \in [4;5].$$

Вторая производная отрицательна на рассматриваемом отрезке.

3. Корень уравнения вычисляют по следующему алгоритму:

а) если $f(a_k) \cdot f''(x) > 0$, то

$$a_{k+1} = a_k - \frac{f(a_k)}{f'(a_k)}, \quad b_{k+1} = b_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} f(b_k);$$

б) если $f(a_k) \cdot f''(x) < 0$, то

$$a_{k+1} = a_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} f(a_k), \quad b_{k+1} = b_k - \frac{f(b_k)}{f'(b_k)}.$$

Значения a_{k+1} надо вычислять с недостатком, а значения b_{k+1} — с избытком во избежание „проскальзывания“ корня.

Результаты вычислений удобно оформлять в виде таблицы.

k	$[a_k; b_k]$	$f(a_k)$	$f(b_k)$	знак $f(a_k)f''(x)$	$f'(b_k)$, если $f(a_k)f''(x) < 0$; $f'(a_k)$, если $f(a_k)f''(x) > 0$	a_{k+1}	b_{k+1}	$\Delta_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1}$
0	$[4; 5]$	$-0,80278$	$0,77259$	$+$	$1,66667$	$4,48166$	$4,50959$	$0,02793$
1	$[4,48166; 4,50959]$	$-0,02332$	$0,02059$	$+$	$1,57444$	$4,49647$	$4,49650$	$0,00003$

Так как уже получена возможная максимальная погрешность $\Delta = \frac{0,00003}{2} = 0,000015 < 0,0001$, то в качестве искомого корня можно взять любое из чисел отрезка $[4,49647; 4,49650]$. Требуется найти приближённое значение корня с четырьмя десятичными знаками, поэтому в качестве ответа можно взять число $4,4965$ или $4,4964$.

Задание 3. Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x - 0,6) - y = 1,6; \\ 3x - \cos y = 0,9. \end{cases}$$

1. Выразим переменные x и y и запишем данную систему в виде

$$\begin{cases} y = \sin(x - 0,6) - 1,6; \\ x = \frac{1}{3}\cos y + 0,3. \end{cases}$$

Построим графики полученных функций (см. рис. 3).

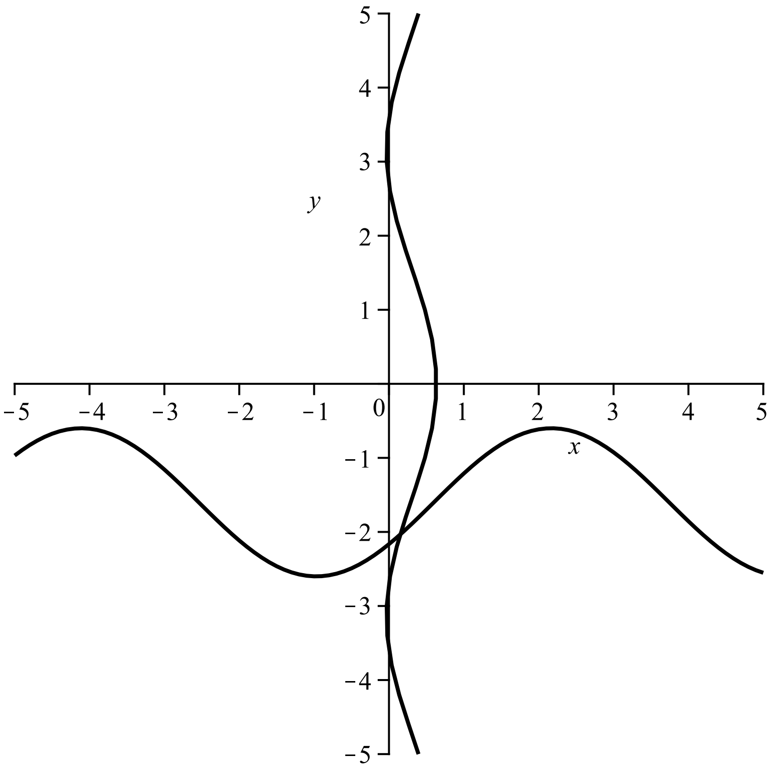

Рис. 3. Пересечение графиков $y = \sin(x - 0,6) - 1,6$ и $x = \frac{1}{3}\cos y + 0,3$.

Увеличив масштаб, определим начальное приближение (см. рис. 4).

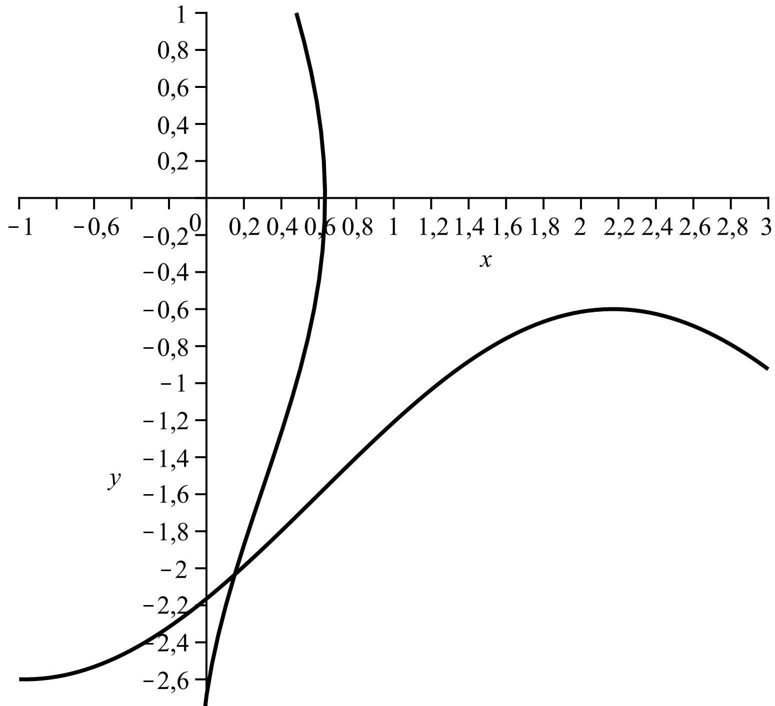

Рис. 4. Увеличен масштаб около точки пересечения.

По графику определяем, что система имеет одно решение, удовлетворяющее условиям

$$0 < x < 0,4, \quad -2,2 < y < -1,8.$$

В качестве начального приближения возьмём $x_0 = 0,2$, $y_0 = -2$.

2. Обозначим

$$\begin{cases} f(x) = \sin(x - 0,6) - 1,6; \\ g(y) = \frac{1}{3}\cos y + 0,3. \end{cases}$$

Учитывая, что $y = f(x)$ и $x = g(y)$, каждое следующее приближение будем искать по формулам

$$\begin{cases} x_{k+1} = g(y_k); \\ y_{k+1} = f(x_k). \end{cases}$$

Процесс останавливается, когда достигнута нужная точность $0,01$, то есть, когда выполнены условия

$$\Delta_{x_k} = |x_{k+1} - x_k| < 0,01 \quad \text{и} \quad \Delta_{y_k} = |y_{k+1} - y_k| < 0,01.$$

Решение удобно оформить в виде таблицы.

k	x_k	y_k	$x_{k+1} = g(y_k)$	$y_{k+1} = f(x_k)$	Δ_{x_k}	Δ_{y_k}
0	$0,2$	-2	$0,1613$	$-1,9894$	$0,0387$	$0,0106$
1	$0,1613$	$-1,9894$	$0,1645$	$-2,0248$	$0,0032$	$0,0354$
2	$0,1645$	$-2,0248$	$0,1538$	$-2,0219$	$0,0107$	$0,0029$
3	$0,1538$	$-2,0219$	$0,1547$	$-2,0315$	$0,0009$	$0,0096$

Так как нам требуется точность два знака после запятой, то получаем

$$x \approx 0,15, \quad y \approx -2,03.$$

Задание 4. Дан интеграл $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

1. Вычислим интеграл по формуле трапеций. Разбиваем отрезок интегрирования $[a; b]$ на n равных частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

По формуле трапеций

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right),$$

где $h = \dfrac{b-a}{n}$ — длина каждого отрезка.

В нашем случае

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad n = 10, \quad a = 0, \quad b = 2, \quad h = \frac{2-0}{10} = 0,2.$$

Так как $n = 10$, то формула принимает вид

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx h \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + \right.$$
$$\left. + f(x_5) + f(x_6) + f(x_7) + f(x_8) + f(x_9) + \frac{f(x_{10})}{2}\right).$$

Вычисляем значения функции $f(x)$ в точках разбиения отрезка:

$$\begin{aligned}
&f(x_0) = f(0) = 0,\\
&f(x_1) = f(0,2) \approx 0,19231,\\
&f(x_2) = f(0,4) \approx 0,34483,\\
&f(x_3) = f(0,6) \approx 0,44118,\\
&f(x_4) = f(0,8) \approx 0,48780,\\
&f(x_5) = f(1) = 0,5,\\
&f(x_6) = f(1,2) \approx 0,49180,\\
&f(x_7) = f(1,4) \approx 0,47297,\\
&f(x_8) = f(1,6) \approx 0,44944,\\
&f(x_9) = f(1,8) \approx 0,42453,\\
&f(x_{10}) = f(2) = 0,4.
\end{aligned}$$

Подставляя найденные значения в формулу трапеций, окончательно получаем

$$\int\limits_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,dx \approx 0,2 \cdot \left(\frac{0}{2} + 0,19231 + 0,34483 + 0,44118 + 0,48780 + \right.$$
$$\left. + 0,5 + 0,49180 + 0,47297 + 0,44944 + 0,42453 + \frac{0,4}{2}\right) \approx 0,80097.$$

2. Вычислим интеграл по формуле Симпсона. Разбиваем отрезок интегрирования $[a;b]$ на n равных частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

По формуле Симпсона

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3} \cdot \Big(\big(f(x_0) + f(x_n)\big) + 4\big(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1})\big) +$$
$$+ 2\big(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{n-2})\big)\Big),$$

где $h = \dfrac{b-a}{n}$ — длина каждого отрезка.

В нашем случае

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad n = 10, \quad a = 0, \quad b = 2, \quad h = \frac{2-0}{10} = 0,2.$$

Так как $n = 10$, то формула принимает вид

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{h}{3}\cdot\Big(\big(f(x_0)+f(x_{10})\big)+4\big(f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)+f(x_7)+f(x_9)\big)+$$

$$+2\big(f(x_2)+f(x_4)+f(x_6)+f(x_8)\big)\Big).$$

Значения функции $f(x)$ в точках разбиения отрезка $[0;2]$ были вычислены в первом пункте. Подставляя эти значения в формулу Симпсона, окончательно получаем

$$\int\limits_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,dx \approx$$

$$\approx \frac{0,2}{3}\cdot\Big(\big(0+0,4\big)+4\big(0,19231+0,44118+0,5+0,47297+0,42453\big)+$$

$$+2\big(0,34483+0,48780+0,49180+0,44944\big)\Big) =$$

$$= \frac{0,2}{3}\cdot\big(0,4+4\cdot 2,03099+2\cdot 1,77387\big) =$$

$$= \frac{0,2}{3}\cdot 12,0717 \approx 0,80478.$$

Рекомендуемая литература

1. Гмурман В. Е. Элементы приближённых вычислений. Издательство Высшая школа. 2005.

2. Поршнев С. В. Беленкова И. В. Численные методы на базе Mathcad. Издательство БХВ. Санкт-петербург. 2012.

3. Протасов И. Д. Лекции по вычислительной математике. Издательство Гелиос АРВ. Москва. 2004.

Содержание