ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1. Множества

Понятие *множества* относится к числу простейших и в то же время фундаментальных понятий математики. Это понятие является *неопределимым* — его нельзя свести к каким-то более простым математическим объектам, но можно пояснить с помощью наглядных примеров. Множества — это совокупности каких-то объектов произвольной природы, и эти объекты называются *элементами* того или иного множества. Тот факт, что какой-то объект e является элементом множества E, записывается в виде

$$e \in E \text{ или } E \ni e$$

и выражается словами

$$e \textit{ принадлежит } (\textit{множеству}) \ E,$$

или

$$(\textit{множество}) \ E \textit{ содержит } (\textit{элемент}) \ e,$$

или

$$e \textit{ является элементом } (\textit{множества}) \ E.$$

Если хотят сказать, что e *не* является элементом множества E, то пишут

$$e \notin E \text{ или } E \not\ni e$$

(иногда также используется обозначения $e \bar{\in} E$ и $E \bar{\ni} e$).

Простейший способ описания множества состоит в *перечислении* его элементов. Например, запись

$$S = \{ \spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit \} \tag{1}$$

определяет множество карточных мастей, и тот факт, что символ пик $\spadesuit$ является мастью,мы можем записать в виде $\spadesuit \in S$, где S задано равенством (1).

Другой способ задания множеств — их словесное описание. Например, можно сказать: «Рассмотрим множество студентов, поступивших в МГТУГА в 2003 году», или: «Пусть X — множество всех камней, лежащих на обратной стороне Луны». Из этих двух примеров видно, что словесные описания не всегда позволяют точно понять, какое множество имеется в виду: если в первом случае можно перечислить все элементы (например, просмотрев списки поступивших студентов), то во втором случае это не так — что есть камень, что называть обратной стороной да и как на эту сторону попасть?

Чтобы избежать подобных проблем, в математике обычно используют более *формальные* способы описания множеств. Например, запись

$$\mathbb{N}_2 = \{ 2n \mid n \in \mathbb{N} \},$$

где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел[1], определяет множество чётных чисел (конечно, если мы знаем, что такое натуральные числа). Ещё один пример: равенство

$$C = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, \ x, y \in \mathbb{R} \}$$

определяет множество точек, лежащих на окружности единичного радиуса с центром в начале координат.

[1] Что такое натуральные и другие числа, нам ещё предстоит выяснить — см. § 3 и § 4. Пока же будем исходить из наивного, школьного представления о них.

Среди всевозможных множеств, изучаемых в математике, есть одно особое. Оно называется *пустым* и не содержит ни одного элемента. Пустое множество можно описывать разными способами. Например, множество

$$\{\, x \in \mathbb{N} \mid n^2 + 1 = 0 \,\}$$

(то есть множество натуральных чисел, квадрат которых равен -1) является пустым. Пустое множество обозначается через $\varnothing$.

Пусть E и E' — множества. Множество E' называется *подмножеством* множества E, если любой элемент из E' является элементом множества E. В этом случае используются обозначения

$$E' \subset E \text{ или } E \supset E'.$$

Из определения следует что любое множество является своим подмножеством, а также пустое множество является подмножеством любого множества, то есть

$$E \subset E, \qquad \varnothing \subset E.$$

Говорят также, что E *содержит* E' в качестве подмножества, или E' *содержится* в E. Имеет место простой и очень важный факт.

Предложение 1. *Если $E \subset E'$ и $E' \subset E$, то $E = E'$.*

Замечание 1. Если множество E' является подмножеством множества E, то его называют *собственным подмножеством.* Иногда (особенно в старой литературе) символы «$\subset$» и «$\supset$» используют для обозначения собственных подмножеств, а когда хотят подчеркнуть, что подмножество может совпадать со всем множеством, пользуются обозначениями «$\subseteq$» и «$\supseteq$».

Множество подмножеств. Пусть E — некоторое множество. Тогда можно рассмотреть множество, элементами которого являются всевозможные подмножества множества E. Оно обозначается через 2^E. Например, для множества S, заданного равенством (1), множество 2^S состоит из[2]

$$\begin{aligned}
&S_0^0 = \varnothing,\\
&S_1^1 = \{\spadesuit\},\ S_1^2 = \{\clubsuit\},\ S_1^3 = \{\diamondsuit\},\ S_1^4 = \{\heartsuit\},\\
&S_2^1 = \{\spadesuit,\clubsuit\},\ S_2^2 = \{\spadesuit,\diamondsuit\},\ S_2^3 = \{\spadesuit,\heartsuit\},\ S_2^4 = \{\clubsuit,\diamondsuit\},\ S_2^5 = \{\clubsuit,\heartsuit\},\ S_2^6 = \{\diamondsuit,\heartsuit\},\\
&S_3^1 = \{\spadesuit,\clubsuit,\diamondsuit\},\ S_3^2 = \{\spadesuit,\clubsuit,\heartsuit\},\ S_3^3 = \{\spadesuit,\diamondsuit,\heartsuit\},\ S_3^4 = \{\clubsuit,\diamondsuit,\heartsuit\},\\
&S_4^1 = \{\spadesuit,\clubsuit,\diamondsuit,\heartsuit\}.
\end{aligned}$$

Вообще, если множество E содержит n элементов, то множество 2^E содержит 2^n элементов.

Операции над множествами. К важнейшим операциям, которые применяются к множествам, относятся:

Объединение: Пусть A и B — множества. Их *объединением* называется множество, содержащее все элементы, принадлежащие либо множеству A, либо B, либо им обоим. Объединение обозначается через $A \cup B$. Если есть произвольный набор множеств A_α, где буква α — элемент некоторого множества *индексов* I, то аналогичным образом можно определить объединение $\cup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Например, если S_i^j — введённые выше множества мастей, то

$$S_1^1 \cup S_1^2 = S_2^1,\ S_2^1 \cup S_2^2 = S_3^1,\ S_3^1 \cup S_3^2 = S_4^1$$

и т.д. Если $(0,2)$ интервал чисел от 0 до 2, а $(1,3)$ — интервал от 1 до 3, то

$$(0,2) \cup (1,3) = (0,3).$$

[2] Обратите внимание на то, что *порядок* перечисления элементов не имеет значения!

Пересечение: *Пересечением* множеств A и B называется множество, которое обозначается через $A \cap B$ и содержит элементы, одновременно принадлежащие и множеству A, и множеству B. Как и выше, можно определить и пересечение $\cap_{\alpha \in I} A_\alpha$ произвольного набора множеств A_α. Например,

$$S_3^1 \cap S_3^2 = S_1^2,\ S_2^1 \cap S_2^3 = S_1^1,\ S_2^1 \cap S_2^6 = \varnothing$$

и

$$(0,2) \cap (1,3) = (1,2).$$

Если пересечение двух множеств равно пустому множеству, то их называют *непересекающимися.*

Разность: *Теоретико-множественная разность* между множеством A и множеством B состоит из тех элементов первого множества, которые не принадлежат второму, и обозначается через $A \setminus B$. Например,

$$S_2^1 \setminus S_2^2 = S_1^2,\ S_2^2 \setminus S_2^1 = S_1^4,$$

а

$$(0,2) \setminus (1,3) = (0,1],\quad (1,3) \setminus (0,2) = [2,3).$$

Ещё две важных операции определяются через предыдущие.

Дополнение: Если A и B — и $A \supset B$, то разность $A \setminus B$ называется *дополнением* множества B в A и обозначается через $\overline{B}$.

Симметрическая разность: *Симметрической разностью* множеств A и B называется множество

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Предложение 2 (свойства теоретико-множественных операций). *Пусть A, B и C — множества, и будем считать, что все они являются подмножествами некоторого множества $\mathfrak{U}$. Тогда справедливы равенства:*

$$A \cup B = B \cup A, \tag{2}$$
$$A \cup (B \cup A) = (A \cup B) \cup A, \tag{3}$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \tag{4}$$
$$A \cup \varnothing = A, \tag{5}$$
$$A \cup \overline{A} = \mathfrak{U}, \tag{6}$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \tag{7}$$
$$A \cap B = B \cap A, \tag{8}$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \tag{9}$$
$$A \cap \mathfrak{U} = A, \tag{10}$$
$$A \cap \overline{A} = \varnothing, \tag{11}$$
$$A \cup \mathfrak{U} = \mathfrak{U}, \tag{12}$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing, \tag{13}$$

а также

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \tag{14}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{15}$$

и

$$\overline{(\overline{A})} = A. \tag{16}$$

Равенства (14) и (15) называются *законами двойственности* (или *правилами де Моргана*).

Связь с логикой. Операции над множествами соответствуют тем логическим законам, которым, как правило, подчиняются разумные рассуждения, используемые в обыденной жизни[3]. Математические модели (схемы) этих рассуждений изучает *математическая логика* — специальный раздел математики, — для нас же в данном случае будут полезны обозначения, используемые в логике, их толкование и связь с теорией множеств. Операции, которые обсуждаются ниже, совершаются над *высказываниями*, то есть некоторыми утверждениями, которые могут быть либо *истинными*, либо *ложными*.

Импликация: *Импликация* высказываний означает, что одно из них *следует* из другого. Импликация обозначается символом $\Rightarrow$, и ей соответствует вложение множеств: пусть $A \subset B$, тогда
$$a \in A \Rightarrow a \in B.$$
Например, если A — множество всех квадратов, а B — множество прямоугольников, то, конечно, $A \subset B$ и
$$(a \text{ — квадрат}) \Rightarrow (a \text{ — прямоугольник})$$
(если a является квадратом, то a является прямоугольником).

Дизъюнкция: *Дизъюнкция* — это связь высказываний через логическое «или». Она обозначается через $\vee$ и соответствует объединению множеств[4]:
$$(a \in A) \vee (a \in B) \Leftrightarrow (a \in A \cup B).$$
Заметим, что логическое «или» имеет *объединительный* смысл (в отличие от его каждодневного употребления, когда «или» понимается как «или–или», но не оба вместе). Например, высказывание
$$(x > 2) \vee (x < 3)$$
означает, что x — любое число.

Конъюнкция: *Конъюнкция* — логическое «и» обозначается через & и соответствует пересечению множеств
$$(a \in A) \,\&\, (a \in B) \Leftrightarrow (a \in A \cap B).$$
Конъюнкция двух высказываний описывает объекты, обладающие и первым, и вторым свойством. Например, запись
$$(a \text{ — ромб}) \,\&\, (a \text{ — прямоугольник})$$
означает, что a является квадратом.

Отрицание: *Отрицание* высказывания обозначается символом $\neg$ и соответствует операции дополнения множеств:
$$\neg(a \in A) \Leftrightarrow a \in \overline{A}.$$
Например, если x — число, то
$$\neg(x > 0)$$
означает, что $x \leqslant 0$.

Свойства теоретико-множественных операций (2)–(16) соответствующим образом отражаются в свойствах высказываний. Например, законы двойственности (14) и (15) на языке высказываний имеют вид
$$\neg(x \vee y) \Leftrightarrow (\neg x) \,\&\, (\neg y)$$
и
$$\neg(x \,\&\, y) \Leftrightarrow (\neg x) \vee (\neg y).$$

[3]Как правило, но не всегда, логика реальной жизни значительно богаче формальной!

[4]Двойная стрелка $\Leftrightarrow$ означает, что высказывания *логически эквивалентны*, т.е. первое является следствием (импликацией) второго и наоборот.

Кванторы. При описании свойств математических объектов часто используют так называемые *кванторы*. Важнейшими из них являются *квантор общности*, обозначаемый символом $\forall$, и *квантор существования*, обозначаемый через $\exists$. При этом запись

$$\forall a \in A \ (\textit{высказывание})$$

означает, что *любой* элемент множества A обладает свойствами, описываемыми соответствующим высказыванием, а запись

$$\exists a \in A \ (\textit{высказывание})$$

означает, что *существует* хотя бы один элемент, обладающий этими свойствами.

Например, запись

$$\exists M \in \mathbb{R}\colon \forall a \in A \subset \mathbb{R}, \ a < M \tag{17}$$

означает, что подмножество действительных чисел A обладает следующим свойством: существует такое действительное число M, что любое число a из этого подмножество не превосходит M (иными словами, множество A ограничено сверху).

Чтобы построить отрицание какой-то записи, содержащей кванторы, нужно $\forall$ заменить на $\exists$ и наоборот, а смысл высказываний поменять на противоположный. Например, отрицание записи (17) выглядит следующим образом:

$$\forall M \in \mathbb{R}\colon \exists a \in A \subset \mathbb{R}, \ a \geqslant M$$

и выражает тот факт, что множество A нельзя ограничить сверху никаким числом.

Необходимость и достаточность. Понятия *необходимости* и *достаточности* являются важнейшими составляющими многих математических рассуждений и доказательств.

Некоторое свойство X называется *достаточным* для того, чтобы объект обладал свойством Y, если наличие свойства X влечёт за собой наличие свойства Y. Например, для того, чтобы четырёхугольник являлся прямоугольником, достаточно, чтобы он был квадратом. Или: для того, чтобы число делилось на три, достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на девять. Пусть B — множество объектов, обладающих свойством X, а A — множество объектов, обладающих свойством Y. Тогда X достаточно для Y означает, что $B \subset A$. Например, множество квадратов является подмножеством множества прямоугольников. На языке логике достаточность выражается записью $X \Rightarrow Y$: «если квадрат, то прямоугольник».

Если свойство X достаточно для Y, то, в свою очередь, Y *необходимо* для X. Так, для того, чтобы четырёхугольник был квадратом, необходимо, чтобы он был прямоугольником. Чтобы число делилось на четыре, необходимо, чтобы оно было чётным.

Условие, являющееся одновременно и необходимым, и достаточным называется *необходимым и достаточным*. Например, для того, чтобы ромб являлся квадратом, необходимо и достаточно, чтобы он был прямоугольником. Необходимость и достаточность в математических текстах часто выражаю словами «тогда и только тогда»: натуральное число тогда и только тогда делится на три, когда сумма его цифр кратна трём. Ещё одно синонимичное выражение — «в том и только в том случае»: треугольник является равнобедренным в том и только в том случае, когда одна из его высот совпадает с соответствующей биссектрисой.

2. Отображения и отношения

Понятие *отображения*, или *соответствия*, как и понятие множества, также принадлежит к числу основополагающих и неопределимых понятий математики. Говорят, что f — отображение из множества A в множество B, если задан *закон*, *правило*, позволяющие по каждому элементу $a \in A$ *однозначно* определить элемент $f(a) \in B$. При этом элемент $b = f(a)$ называется *образом* элемента a при отображении f, а элемент a — *прообразом* элемента b. Множество всевозможных образов отображения f обозначается через $f(A)$:

$$f(A) = \{\, b \in B \mid b = f(a), \ \forall a \in A \,\} \subset B.$$

Множество прообразов элемента b обозначается через $f^{-1}(b)$:

$$f^{-1}(b) = \{\, a \in A \mid b = f(a) \,\} \subset A.$$

Если f — отображение из A в B, то пишут $f\colon A \to B$. Множество отображений из A в B обозначается через B^A.

Отображение $f\colon A \to B$ называется *отображением на* (или *сюрьекцией*), если $f(A) = B$, то есть если любой элемент множества A является образом некоторого элемента из B:

$$\forall b \in B\ \exists a \in A\colon b = f(a).$$

Отображение называется *вложением* (или *инъекцией*), если прообраз любого элемента из B содержит не более одного элемента из A:

$$\forall a, a' \in A\colon f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'.$$

Наконец, отображение $f\colon A \to B$ называется *взаимно-однозначным соответствием* (или *биекцией*), если оно одновременно является и инъецией, и сюръекцией, то есть если любой элемент $b \in B$ является образом какого-то элемента $a \in A$, и всякий $b \in B$ обладает ровно одним прообразом.

Пример 1. Пусть $\mathcal{K}$ — колода карт, то есть множество всевозможных карт различной масти и достоинства. Сопоставим каждой карте её масть. Тем самым мы определим отображение $f\colon \mathcal{K} \to S$ в множество S, заданное записью (1), поскольку всякая карта обладает единственной мастью. Это отображение является сюръекцией.

Пример 2. Пусть отображение $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ сопоставляет каждому действительному числу его квадрат. Тогда

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\}, & \text{если } y > 0, \\ \{0\}, & \text{если } y = 0, \\ \varnothing & \text{если } y < 0, \end{cases}$$

и $f(\mathbb{R})$ есть множество всех неотрицательных чисел.

Пример 3. Рассмотрим действительное число x и сопоставим ему такое число y, что

$$y^2 = x \tag{18}$$

Эта конструкция *не* задаёт отображения, поскольку, во-первых, квадратный корень можно извлекать только их неотрицательных чисел и, во-вторых, при $x > 0$ существует *два* значения y, определяемых уравнением (18). Если, однако, рассматривать только неотрицательные x и выбрать какое-то одно значение корня (например, $y \geqslant 0$), то мы получим взаимно-однозначное соответствие из множества неотрицательных действительных чисел в себя. То же самое отображение, понимаемое как отображение во всё множество действительных чисел, является инъекцией.

Пусть A — произвольное множество. Тогда отображение $\mathrm{id}_A\colon A \to A$, сопоставляющее каждому элементу $a \in A$ его самого, то есть

$$\forall a \in A\colon\ \mathrm{id}_A(a) = a,$$

называется *тождественным*. Если понятно, какое множество имеется в виду, пишут просто id.

Если A, B и C — множества, а

$$f\colon A \to B, \qquad g\colon B \to C$$

— отображения, то можно определить отображение $g \circ f\colon A \to C$, полагая

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)), \qquad a \in A.$$

Это отображение называется *композицией* отображений f и g.

Предложение 3. *Если* $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ *и* $h\colon C \to D$ — *произвольные отображения множеств, то*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \tag{19}$$

и

$$\mathrm{id}_B \circ f = f, \qquad f \circ \mathrm{id}_A = f. \tag{20}$$

Кроме того, композиция сюрьекций является сюръекцией, а инъекций — инъекцией.

Отображение $g\colon B \to A$ называется *обратным* к отображению $f\colon A \to B$, если

$$g \circ f = \mathrm{id}_A, \qquad f \circ g = \mathrm{id}_B\,.$$

Очевидно, что и g обратно к f. В этом случае пишут $g = f^{-1}$ и $f = g^{-1}$ и отображения называют *взаимно обратными.*

Предложение 4. *Отображение* $f\colon A \to B$ *обладает обратным тогда и только тогда, когда оно является взаимно-однозначным соответствием.*

Декартово произведение. Пусть A и B — множества.

Определение 1. *Декартовым* (или *прямым*) *произведением* множеств A и B называется множество

$$A \times B = \{\, (a,b) \mid a \in A,\ b \in B \,\},$$

состоящее состоящее из всевозможных упорядоченных пар элементов $a \in A$ и $b \in B$. Отображения $\mathrm{pr}_A\colon A \times B \to A$ и $\mathrm{pr}_B\colon A \times B \to B$, задаваемые условиями

$$\mathrm{pr}_A(a,b) = a, \qquad \mathrm{pr}_B(a,b) = b,$$

называются *проекциями* на левый и правый сомножители.

Пример 4. Если N — множество различных достоинств карт из колоды, то есть

$$N = \{2,\ 3, \dots, 10,\ \text{В, Д, К, Т}\},$$

а S — множество мастей, то $N \times S$ — множество всех карт колоды. Например, пара $(\text{Т}, \spadesuit)$ — это туз пик, пара $(3, \clubsuit)$ обозначает тройку треф и т.п.

Пример 5. Всевозможные прямоугольные таблицы — это прямые произведения, в которых одним сомножителем является множество имён строк, а вторым — множество имён столбцов. При этом заполненная таблица является отображением из этого произведения в множество соответствующих значений.

Пример 6. Если $X = [x, x']$ и $Y = [y, y']$ — отрезки, то $X \times Y$ — прямоугольник со сторонами X и Y.

Пример 7. Декартово произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — это плоскость.

Предложение 5. *Пусть* A *и* B — *множества. Тогда отображение* $f\colon A \times B \to B \times A$, *определённое равенством*

$$f(a,b) = (b,a), \qquad a \in A, \quad b \in B,$$

является биекцией. Если C — *третье множество, то отображение* $g\colon (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$, *определённое равенством*

$$g((a,b),c) = (a,(b,c)), \qquad a \in A, \quad b \in B, \quad c \in C,$$

— *также биекция.*

Пусть A — множество. Рассмотрим множество $A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n\ \text{раз}}$.

Определение 2. Подмножество $\mathcal{R} \subset A^n$ называется *n-арным отношением* на множестве A. Говорят, что элементы $a_1, \dots, a_n$ *связаны* отношением $\mathcal{R}$, если

$$A^n \ni (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{R}.$$

В этом случае пишут

$$a_1 \mathcal{R} \dots \mathcal{R} a_n \tag{21}$$

Иногда отношением называют запись (21), а само множество $\mathcal{R}$ называют *графиком* этого отношения.

Пример 8. Если $n = 1$, то отношение называется *унарным.* Таким образом, унарные отношения — это просто подмножества множества A. Например, свойство карты быть бубной является унарным отношением, определённым на колоде карт.

Пример 9. Если $n = 2$, то отношение называется *бинарным.* Например, свойство двух чисел не иметь общих делителей является бинарным отношением на множестве натуральных чисел. Свойство двух точек прямой находиться на расстоянии не более заданного числа ε друг от друга является бинарным отношением на множестве действительных чисел.

Пример 10. Пусть $f\colon A \to A$ — отображение множества A в себя. Ему соответствует бинарное отношение

$$\mathcal{G}_f = \{\, (a, f(a)) \mid a \in A \,\} \subset A \times A, \tag{22}$$

которое называется *графиком* отображения f.

Пример 11. Если $n = 3$, то отношение называется *тернарным.* Например, свойство трёх точек быть вершинами равностороннего треугольника — тернарное отношение на плоскости. Свойство трёх человек быть отцом, матерью и ребёнком является тернарным отношением на множестве всех людей.

Рассмотрим два важных типа бинарных отношений.

Отношения эквивалентности. Рассмотрим множество A.

Определение 3. Бинарное отношение $\mathcal{R} \subset A \times A$ называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает следующими свойствами:

$$\text{рефлексивность:} \quad a\mathcal{R}a, \tag{23}$$

$$\text{симметричность:} \quad a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a, \tag{24}$$

$$\text{транзитивность:} \quad a\mathcal{R}b \ \&\ b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c \tag{25}$$

для любых элементов a, b, $c \in A$.

Очень часто отношения эквивалентности обозначают символом $\sim$. В этом случае свойства (23)—(25) перепишутся в виде

$$\text{рефлексивность:} \quad a \sim a,$$

$$\text{симметричность:} \quad a \sim b \Rightarrow b \sim a,$$

$$\text{транзитивность:} \quad a \sim b \ \&\ b \sim c \Rightarrow a \sim c.$$

Пример 12. Свойство двух карт колоды быть одной масти является отношением эквивалентности.

Пример 13. Свойство двух точек плоскости, не совпадающих с началом координат O, лежать на одном луче, проходящем через O, — отношение эквивалентности.

Пример 14. Скажем, что два множества *равномощны* (или имеют *одинаковую мощность*), если между ними существует взаимно-однозначное соответствие. Равномощность является отношением эквивалентности.

Пусть $\sim$ — отношение эквивалентности на множестве A. Подмножество

$$[a] = \{\, b \in A \mid b \sim a \,\} \subset A$$

называется *классом эквивалентности* элемента a (построенным по отношению $\sim$).

Предложение 6. *Любые два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.*

Определение 4. Множество классов эквивалентности, построенных по некоторому отношению $\sim$, называется *фактормножеством* и обозначается через $A/\sim$. Сопоставление каждому элементу $a \in A$ его класса эквивалентности называется *факторотображением*, или *отображением факторизации*:

$$\pi\colon A \to A/\sim, \qquad \pi(a) = [a].$$

Пример 15. В примере 12 фактормножеством является множество мастей, а отображение факторизации сопоставляет каждой карте её масть.

Пример 16. В примере 13 каждому классу эквивалентности можно сопоставить угол между соответствующим лучом и положительным направлением оси OX, а фактормножество отождествить, например, с единичной окружностью с центром в начале координат.

Пример 17. В примере 14 множества объединяются в классы эквивалентности, содержащие равномощные множества. Такой класс эквивалентности называется *кардинальным числом*, хотя и не является числом в обычном понимании (см. ниже).

Отношения порядка. Пусть A — множество.

Определение 5. Отношение $\mathcal{R} \subset A \times A$ называется *отношением порядка*, если оно обладает следующими свойствами:

$$\text{рефлексивность:} \qquad a\mathcal{R}a, \tag{26}$$

$$\text{транзитивность:} \qquad a\mathcal{R}b \;\&\; b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c, \tag{27}$$

$$\text{антисимметричность:} \qquad a\mathcal{R}b \;\&\; b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b. \tag{28}$$

Если множество снабжено отношением порядка, оно называется *упорядоченным.* Если отношение порядка обладает дополнительным свойством

$$\forall a, b \in A\colon a\mathcal{R}b \;\vee\; b\mathcal{R}a, \tag{29}$$

то множество называется *линейно упорядоченным.*

Отношение порядка часто обозначается символом $\leqslant$. В этом случае свойства (26)—(28) перепишутся в виде

$$\text{рефлексивность:} \qquad a \leqslant a$$

$$\text{транзитивность:} \qquad a \leqslant b \;\&\; b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$$

$$\text{антисимметричность:} \qquad a \leqslant b \;\&\; b \leqslant a \Rightarrow a = b,$$

а свойство (29) — в виде

$$\forall a, b \in A\colon a \leqslant b \;\vee\; b \leqslant a.$$

Пример 18. Отношение «меньше» является отношением линейного порядка на множестве натуральных (а также целых, рациональных и действительных) чисел.

Пример 19. Свойство множества быть подмножеством другого определяет отношение порядка на множестве 2^A, где A — какое-то множество. Этот порядок не является линейным.

Пример 20 (лексикографический порядок). Пусть $\mathfrak{A}$ — какой-то алфавит (например, кириллический или латинский), то есть конечное и линейно упорядоченное множество букв. Тогда множество слов, записанных в этом алфавите тоже линейно упорядочено (как это сделано в словарях). Этот порядок слов называется *лексикографическим.*

Кардинальные числа. В примере 17 было введено понятие кардинального числа как класса эквивалентности равномощных множеств. Поскольку, по определению, все множества с данным кардинальным числом имеют одну и ту же мощность, понятие кардинального числа и понятие мощности — это одно и то же. Кардинальное число множества A (или его мощность) обозначается через $|A|$ (иногда через $\#(A)$).

Пример 21. Пусть T множество, состоящее из двух элементов. Тогда множество подмножеств любого множества A равномощно множеству T^A, состоящему из всевозможных отображений их A в T.

Мощности множеств можно сравнивать.

Определение 6. Пусть A и B — множества. Скажем, что $|A| \leqslant |B|$ (то есть множество A *не мощнее* множества B), если A равномощно какому-нибудь подмножеству множества B. Скажем, что $|A| < |B|$, если $|A| \leqslant |B|$ и A не равномощно B.

Предложение 7. *Пусть A — произвольное множество. Тогда* $|A| < |2^A|$.

Определение 7. Множество называется *бесконечным*, если оно равномощно своему собственному подмножеству.

Арифметика изучает кардинальные числа множеств, не являющихся бесконечными.

3. Натуральные числа, целые и рациональные числа

Господь дал людям единицу, а остальное они придумали сами.
Широко известный факт

На самом деле, построение всей математики можно начать с пустого множества. Положим $\#(\varnothing) = 0$ — это определение нуля! Единица — это кардинальное число множества $2^\varnothing$: $\#(2^\varnothing) = 1$, и множество $2^\varnothing$ содержит ровно один элемент. Располагая этим множеством, мы можем построить множества с произвольным *конечным* числом элементов. Так, множество мощности 2 получается объединением двух одноэлементных множеств, и, если построено множество мощности n, то множество мощности $n+1$ получается из предыдущего добавлением одноэлементного множества. Получаемые таким образом кардинальные числа называются *натуральными*. Множество натуральных чисел линейно упорядочено,

$$1 < 2 < \dots < n < n+1 < \dots,$$

обозначается через $\mathbb{N}$ и называется *натуральным рядом*.

Замечание 2. Натуральный ряд обладает более сильным свойством, чем линейный порядок: у каждого натурального числа есть *последующее* и каждого, кроме единицы, — *предыдущее*.

Аксиома индукции. Заметим, что само определение натуральных чисел *индуктивно*: следующее натуральное число определяется добавлением единицы к предыдущему. Это отражает важнейшее свойство натурального ряда, которое называется *аксиомой* (или *принципом*) *математической индукции*: если какое-то утверждение верно для 1 и из предположения, что оно верно для n, следует, что оно верно для $n+1$, то это утверждение верно для всех натуральных чисел[5].

Принцип математической индукции является одним из основных при определении понятий и доказательстве различных утверждений, относящихся к натуральным числам. Например, сложение и умножение натуральных чисел *определяется по индукции следующим образом*:

Сложение: Умножение:

[5]Мы предполагаем, что натуральный ряд начинается с единицы. Можно считать, что он начинается с нуля, — это вопрос договорённости.

$$1 + 1 = 2, \qquad\qquad 1 \cdot 1 = 1,$$
$$n + (m + 1) = (n + m) + 1, \qquad\qquad n \cdot (m + 1) = n \cdot m + n,$$

а потом по индукции же *доказывается*, что эти операции обладают известными свойствами:

$n + m = m + n$,	коммутативность сложения,
$(n + m) + k = n + (m + k)$,	ассоциативность сложения,
$1 \cdot n = n$,	умножение на единицу тождественно,
$n \cdot m = m \cdot m$,	коммутативность умножения,
$n \cdot (m \cdot k) = (n \cdot m) \cdot k$,	ассоциативность умножения,
$n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k$,	дистрибутивность умножения относительно сложения.

Докажем, например, что $1 \cdot n = n$. Для $n = 1$ это выполняется по определению. Предположим, что при n это верно. Тогда из определения умножения и сделанного предположения следует, что

$$1 \cdot (n + 1) = 1 \cdot n + 1 \cdot 1 = n + 1.$$

Значит, по принципу индукции это верно для всех n.

Множество натуральных чисел бесконечно. Его мощность обозначается через $\aleph_0$, и всякое множество, имеющее такую мощность, то есть равномощное натуральному ряду, называется *счётным*[6].

Целые числа. *Целые числа* возникают как решения уравнений вида

$$x + n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{30}$$

которые нельзя решить, находясь внутри натурального ряда. А именно, мы «руками» расширяем натуральный ряд нулём, а также «значками» вида $-n$, где n — натуральное число (эти значки называются *отрицательными* целыми числами), и полагаем

$$n + (-1) = \{\text{число, предшествующее } n\},$$

если $n > 1$, и далее по индукции

$$n + (-(m + 1)) = \begin{cases} n - m - 1, & \text{если } n > m + 1, \\ 0, & \text{если } n = m + 1, \\ -(m - n + 1), & \text{если } n < m + 1. \end{cases}$$

Умножаются целые числа по правилам

$$(-n) \cdot m = -(nm), \qquad (-n) \cdot (-m) = nm.$$

Далее можно доказать, что сложение и умножение целых чисел коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно. Полученное множество с операциями сложения и умножения обозначается через $\mathbb{Z}$. Оно счётно и тоже линейно упорядочено:

$$\dots - (n + 1) < -n < \dots < -1 < 0 < 1 < \dots$$

Кроме того, в отличие от натуральных чисел, все целые числа можно вычитать друг из друга:

$$n - m = n + (-n), \quad n - (-m) = n + m, \quad (-n) - m = -(n + m), \quad (-n) - (-m) = m - n.$$

Замечание 3. Пифагор, живший в VI в. до нашей эры, считал, что числа существуют в природе. С тех пор человечество шагнуло далеко вперёд, и, как мы убедились, даже такие «естественные» числа, как натуральные и целые, создаются «руками».

[6] $\aleph$ — первая буква древнееврейского алфавита; читается «áлеф».

Рациональные числа. Как и числа целые, рациональные числа возникают при решении уравнения

$$mx + n = 0, \qquad m, n \in \mathbb{Z}, \tag{31}$$

которое, вообще говоря, неразрешимо в целых числах. Чтобы сделать уравнение (31) разрешимым, вводят понятие *рациональной дроби*, и делается это следующим образом.

Рассмотрим прямое произведение $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ и подмножество

$$Q = \{\, (m, n) \mid m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \,\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Введём на множестве пар $(m, n) \in Q$ отношение P, полагая

$$(m, n) P (m', n') \Leftrightarrow mn' = nm'. \tag{32}$$

Предложение 8. *P — отношение эквивалентности.*

Обозначим через $\frac{m}{n}$ класс эквивалентности пары (m, n) и назовём этот класс *рациональной дробью* с *числителем* m и знаменателем n. На множестве рациональных дробей можно ввести операции *сложения* и *умножения*, полагая

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + kn}{nl}, \qquad \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{mk}{nl}. \tag{33}$$

Ситуация оказывается, однако, не столь простой, как это кажется на первый взгляд. Дело в том, что по определению рациональная дробь это класс эквивалентности, то есть множество, а определение операций, данное равенствами (33), фактически формулируется в терминах отдельных элементов, то есть *представителей* этих классов. Поэтому, вообще говоря, может случиться так, что выбрав два разных представителя, мы получим разные результаты. Чтобы этого не случилось, определение (33) должно быть, как говорят в математике, *корректным*. Это означает следующее.

Предложение 9. *Пусть (m, n) и (m', n'), а также (k, l) и (k', l') — пары, эквивалентные в смысле отношения эквивалентности* (32). *Тогда пары*

$$(ml + kn, nl), \qquad (m'l' + k'n', n'l')$$

и

$$(mk, nl), \qquad (m'k', n'l')$$

также эквивалентны.

Это и означает, что сложение и умножение рациональных дробей действительно определено на множестве этих дробей, а не на отдельных парах, из которых эти дроби строятся.

Замечание 4. Класс эквивалентности пары (m, n) состоит из всевозможных дробей, которые приводятся друг к другу «сокращением числителя и знаменателя на общий множитель». То есть вводя отношение эквивалентности (32), мы на самом деле говорим, что, скажем, $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{4}$ — это одно и то же. К сожалению, никак проще, чем это было сделано выше, этого сделать нельзя (если мы, конечно, хотим придерживаться математической строгости).

Полученное множество дробей обозначается через $\mathbb{Q}$ и называется *полем рациональных чисел*. В этом поле можно складывать, вычитать, умножать и, в отличие от целых чисел, делить на любую ненулевую дробь. Существует инъекция множества целых чисел в поле $\mathbb{Q}$: каждому целому числу m можно сопоставить дробь $\frac{m}{1}$.

Может показаться, что рациональных чисел «гораздо больше», чем целых. На самом деле это не так.

Предложение 10. *Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счётно.*

Заметим также, что множество рациональных чисел линейно упорядочено: $\frac{m}{n} \leqslant \frac{k}{l}$ тогда и только тогда, когда

$$(ml - nk)nl \leqslant 0. \tag{34}$$

Этот порядок согласован с порядком, заданным на множестве целых чисел: если $m, n \in \mathbb{Z}$, то $m \leqslant n$ тогда и только тогда, когда $\frac{m}{1} \leqslant \frac{n}{1}$.

Замечание 5. Фактически, к понятию рационального числа пришли ещё древние греки (и, как ни странно, рациональные числа были «изобретены» гораздо раньше, чем целые отрицательные). Правда, они использовали не абстрактный алгебраический язык, а язык геометрии, рассматривая задачу о *соизмеримости отрезков*. Они же обнаружили существование *несоизмеримых* отрезков, то есть, говоря современным языком, *иррациональных чисел*. Чтó это такое, мы обсудим в § 4.

4. Действительные числа

Действительные числа проходят в школе.
Распространённое заблуждение

Хотя по-настоящему строго действительные числа были определены только во второй половине XIX в. Р. Дедекиндом, представление об их существовании существовало, как уже отмечалось, ещё у древних греков.

Несоизмеримые отрезки. Два отрезка называются *соизмеримыми*, если они имеют *общую меру*, то есть если существует такой отрезок, который укладывается целое число раз и в первом, и во втором отрезке. Если такого отрезка нет, отрезки называются *несоизмеримыми*. Примером несоизмеримых отрезков являются сторона и диагональ квадрата. Действительно, если принять сторону квадрата за a, а длину диагонали за c, то из теоремы Пифагора будет следовать, что

$$c^2 = 2a^2. \tag{35}$$

Соизмеримость означает, что $c = ml$, $a = nl$, где l — общая мера. Поэтому уравнение (35) перепишется в виде

$$m^2 = 2n^2, \qquad m, n \in \mathbb{N}. \tag{36}$$

Можно считать, что числа m и n не имеют общего множителя (в противном случае на этот множитель можно было бы сократить). Из уравнения (36) следует, что число m делится на 2, то есть $m = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Значит, $2k^2 = n^2$ и, следовательно, n тоже делится на 2. Но это противоречит предположению о том, что m и n не имеют общего множителя. Следовательно, представление (36) невозможно.

Последовательные приближения. Несмотря на полученный выше отрицательный результат, мы можем сколь угодно точно найти выражение величины c через a. Именно, положим $c = ax$, и тогда равенство (35) примет вид

$$x^2 = 2. \tag{37}$$

Поскольку $1^2 < 2$, а $2^2 > 2$, искомое решение, если оно существует, должно лежать в интервале $(1, 2)$. Рассмотрим середину этого интервала — число $\frac{3}{2}$; оно отличается от решения не более, чем на $\frac{1}{2}$. Далее очевидно, что решение должно лежать в интервале $(1, \frac{3}{2})$, поскольку $(\frac{3}{2})^2 > 2$. Следовательно, число $\frac{5}{4}$, — середина интервала $(1, \frac{3}{2})$, — отличается от решения не более, чем на $\frac{1}{4}$. На следующем шаге мы замечаем, что решение лежит в интервале $(\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$ и так далее, до бесконечности.

Рассмотренный пример показывает, что существует «нечто», являющееся решением уравнения (37), но это — не рациональное число, хотя и может быть как угодно точно приближено рациональными числами. Что это такое, объясняется ниже.

Сечения Дедекинда. Итак, мы установили, что в множестве рациональных чисел имеются лакуны, разрывы. Оказывается, эти разрывы можно «заклеить».

Определение 8. Пара подмножеств (A, A'), где $A, A' \subset \mathbb{Q}$, называется *сечением* множества рациональных чисел, если выполняются следующие условия:

1) $A, A' \neq \varnothing$,
2) $A \cup A' = \mathbb{Q}$,
3) $A \cap A' = \varnothing$,

4) $\forall p \in A,\ q \in A' \Rightarrow p < q$.

Множество A называется *нижним классом* сечения, а множество A' — его *верхним классом.*

Иными словами, сечение — это такое разбиение множества рациональных чисел на два подмножества, что любое рациональное число попадает в одно из этих подмножеств (но не в оба вместе) и всякое число из нижнего класса строго меньше всякого числа, принадлежащего верхнему классу.

Пример 22. Пусть

$$A = \{\, p \in \mathbb{Q} \mid p^2 > 2 \ \&\ p > 0 \,\}$$

и

$$A' = \{\, q \in \mathbb{Q} \mid (q \leqslant 0) \vee (q^2 \leqslant 2 \ \&\ q > 0) \,\}.$$

Пара (A,A') — сечение множества рациональных чисел.

Пример 23. Пара

$$A = \{\, p \in \mathbb{Q} \mid p < 0 \,\}, \quad A' = \{\, q \in \mathbb{Q} \mid q \geqslant 0 \,\}.$$

является сечением.

Пример 24. Пара

$$A = \{\, p \in \mathbb{Q} \mid p \leqslant 0 \,\}, \quad A' = \{\, q \in \mathbb{Q} \mid q > 0 \,\}$$

также является сечением.

Сечение, построенное в примере 22, принципиально отличается от сечений, построенных в двух других примерах. Именно, сечения из примеров 23 и 24 определяются рациональными числами, в то время как в примере 22 это не так — там построено новое число. Это, как нетрудно видеть, квадратный корень из 2.

Определение 9. Сечение множества рациональных чисел называется *рациональным*, если либо его верхний класс содержит минимальный элемент, либо его нижний класс содержит максимальный элемент. В противном случае сечение называется *иррациональным.*

Сечения из примеров23 и 24 рациональны, а сечение, описанное в примере 22, иррационально.

Действительные числа. В определении 9 введены два типа рациональных сечений. Таким образом, все рациональные сечения разбиваются на пары, задаваемые одним и тем же рациональным числом. Мы всегда для определённости будем предполагать, что это число лежит в верхнем классе.

Определение 10. Множество $\mathbb{R}$, составленное из все иррациональных сечений, а также таких рациональных сечений, что их верхний класс содержит минимальный элемент, называется *множеством действительных* (или *вещественных*) *чисел.*

Элементы множества $\mathbb{R}$ называются *действительными* (или *вещественными*) *числами.* Если действительному числу соответствует рациональное сечение, то оно называется *рациональным*; в противном случае оно называется *иррациональным.*

Два действительных числа считаются *равными*, если верхние классы (или, эквивалентно, нижние классы) соответствующих им сечений совпадают.

Свойства действительных чисел можно подразделить на два типа — теоретико-множественные и алгебраические, — и изучению этих свойств посвящена оставшаяся часть настоящей главы.

Теоретико-множественные свойства. Первое замечательное свойства множества действительных чисел состоит в следующем.

Теорема 1. *Множество $\mathbb{R}$ равномощно множеству подмножеств множества $\mathbb{N}$.*

Мощность множества действительных чисел обозначается через $\aleph$. Из предложения 7 следует, что она больше $\aleph_0$. Можно также условно записать, что $\aleph = 2^{\aleph_0}$. Про множества, равномощные $\mathbb{R}$, говорят, что они имеют *мощность континуума*.

Второе важное свойство действительных чисел — их линейная упорядоченность. Предположим, что α и β — действительные числа и A и B — нижние классы соответствующих сечений.

Определение 11. Мы говорим, что $\alpha \leqslant \beta$, если $A \subset B$.

Предложение 11. *Введённое в определении 11 отношение является отношением линейного порядка на множестве действительных чисел. Более того, этот порядок согласован с линейным порядком* (34), *определённым на множестве* $\mathbb{Q}$ *рациональных чисел.*

Построенное нами отношение порядка обладает свойствами, описываемыми следующими тремя утверждениями.

Лемма 1. *Если α и β — действительные числа и $\alpha < \beta$, то всегда найдётся бесконечное множество таких рациональных чисел r, что $\alpha < r < \beta$.*

Лемма 2. *Если α и β — такие действительные числа, что для любого рационального числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие рациональные числа r и r', что*

$$r \leqslant \alpha \leqslant r', \quad r \leqslant \beta \leqslant r', \quad r - r' \leqslant \varepsilon,$$

то $\alpha = \beta$.

Лемма 3. *Если α — действительное число, то всегда найдётся такое целое число n, что $n \leqslant \alpha < n + 1$.*

Число n, возникающее в лемме 3, называется *целой частью* действительного числа α и обозначается через $[x]$. Разность $x - [x]$ называется *дробной частью* и обозначается через $\{x\}$.

Поскольку множество действительных чисел упорядочено, в нём, точно так же, как это было сделано в определении 8 для рациональных чисел, можно ввести понятие сечения. Оказывается, ничего нового мы не получим:

Теорема 2 (теорема Дедекинда о непрерывности $\mathbb{R}$). *Если (A, A') — сечение множества действительных чисел, где A — нижний класс, а A' — верхний, то существует такое действительное число α, что либо*

$$A = \{\, \beta \in \mathbb{R} \mid \beta \leqslant \alpha \,\}, \quad A' = \{\, \beta \in \mathbb{R} \mid \beta > \alpha \,\},$$

либо

$$A = \{\, \beta \in \mathbb{R} \mid \beta < \alpha \,\}, \quad A' = \{\, \beta \in \mathbb{R} \mid \beta \geqslant \alpha \,\}.$$

Замечание 6. По этой причине множество действительных чисел иногда называют *континуумом*[7], а равномощные ему, как уже отмечалось, множествами мощности континуума.

Последнее свойство действительных чисел, связанное с отношением порядка, относится к ограниченным модмножествам в $\mathbb{R}$.

Определение 12. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — подмножество.

1) Оно называется *ограниченным сверху*, если существует такое число $M \in \mathbb{R}$, что $x \leqslant M$ для любого $x \in X$.
2) Оно называется *ограниченным снизу*, если существует такое число $m \in \mathbb{R}$, что $x \geqslant M$ для любого $x \in X$.
3) Наименьшее из чисел, ограничивающих X сверху, называется *точной верхней гранью* и обозначается через $\sup X$.
4) Наибольшее из чисел, ограничивающих X снизу, называется *точной нижней гранью* и обозначается через $\inf X$.

[7]От латинского *continuum* — непрерывное.

Если множество *не* ограничено сверху, то пишут $\sup X = +\infty$, а если оно *не* ограничено снизу, то $\inf X = -\infty$.

Теорема 3. *Всякое подмножество $X \subset \mathbb{R}$, ограниченное снизу (сверху), имеет точную нижнюю (верхнюю) грань.*

Замечание 7. Для подмножеств множества рациональных чисел это, вообще говоря, не верно. Например, множество

$$E = \{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

ограничено сверху, но не имеет точной верхней грани среди рациональных чисел.

Прежде чем переходить ко второй группе свойств, установим связь между данным выше формальным определением действительного числа и привычным представлением о нём.

Приближение действительных чисел десятичными дробями. Те действительные числа, с которыми люди сталкиваются в «обыденной жизни», являются, как правило, десятичными дробями. Это не случайно.

Предложение 12. *Пусть α — действительное число. Тогда для любого рационального числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие конечные десятичные дроби d и d', что $d - d' \leqslant \varepsilon$ и $d \leqslant \alpha \leqslant d'$.*

Число d называется *приближением с недостатком*, число d' — *приближением с избытком*, а ε — *точностью приближения*.

Предложение 12 означает, что произвольные действительные числа можно мыслить себе как *бесконечные десятичные дроби*. Рассмотрим такую дробь и обозначим k-ю десятичную цифру после запятой через c_k (если дробь конечна и имеет длину $< k$, то $c_k = 0$). Скажем, что дробь *периодическая*, если найдутся такие натуральные числа K и p, что

$$c_k = c_{k+p}, \qquad \forall k \geqslant K.$$

Предложение 13. *Действительное число является рациональным тогда и только тогда, когда соответствующая ему десятичная дробь является периодической.*

Арифметические операции и их свойства.

Определение 13. Пусть α и β — действительные числа. Их *суммой* называется число γ, удовлетворяющее неравенствам

$$a + b \leqslant \gamma \leqslant a' + b',$$

где a, a', b, b' — произвольные рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$a \leqslant \alpha \leqslant a', \qquad b \leqslant \beta \leqslant b'.$$

Сумма обозначается через $\alpha + \beta$.

Предложение 14. *Для любых действительных чисел их сумма существует, единственна и обладает следующими свойствами:*

1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$,
2) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$,
3) $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$,
4) *для любого α существует такое число $-\alpha$ (число, противоположное α), что $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$,*
5) *если $\alpha < \beta$, то и $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ для любого $\gamma \in \mathbb{R}$.*

Определим *модуль* (или *абсолютную величину*) числа α, полагая

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \geqslant 0, \\ -\alpha, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases}$$

Определение 14. Пусть α и β — положительные действительные числа. Их *произведением* называется число γ, удовлетворяющее неравенствам

$$\alpha\beta \leqslant \gamma \leqslant \alpha'\beta',$$

где a, a', b, b' — произвольные рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < a \leqslant \alpha \leqslant a', \qquad 0 < b \leqslant \beta \leqslant b'.$$

Произведение обозначается через $\alpha \cdot \beta$ (или $\alpha\beta$). Если $\beta = 0$, то мы полагаем

$$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0.$$

Для произвольных α и β их произведение определяется следующим образом:

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} |\alpha| \cdot |\beta|, & \text{если } \alpha \text{ и } \beta \text{ одного знака,} \\ -(|\alpha| \cdot |\beta|), & \text{если } \alpha \text{ и } \beta \text{ разных знаков.} \end{cases}$$

Предложение 15. *Для любых действительных чисел их произведение существует, единственно и обладает следующими свойствами*:

1) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$,
2) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$,
3) $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$,
4) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$,
5) *для любого числа* $\alpha \neq 0$ *существует такое число* α^{-1} (*число, обратное к* α), *что* $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$,
6) *если* $\alpha < \beta$ *и* $\gamma > 0$, *то и* $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.

Степени и логарифмы. Пусть α — действительное число и $n \in \mathbb{Z}$ — целое. Положим

$$\alpha^n = \begin{cases} \underbrace{\alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{n \text{ раз}}, & \text{если } n > 0, \\ 1, & \text{если } n = 0 \text{ и } \alpha \neq 0, \\ \frac{1}{\alpha^{-n}}, & \text{если } n < 0 \text{ и } \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Предложение 16 (существование корней). *Пусть $\alpha > 0$ — действительное число. Тогда для любого целого n существует и единственно такое действительное число $\beta > 0$, что*

$$\beta^n = \alpha.$$

Число β называется *корнем n-й степени из* $\alpha 0$ и обозначается либо через $\sqrt[n]{\alpha}$, либо через $\alpha^{-\frac{1}{n}}$. Если $\alpha < 0$ и n нечётно, то мы полагаем $\sqrt[n]{\alpha} = -\sqrt[n]{-\alpha}$. Для любого рационального числа $r = \frac{m}{n}$ положим

$$\alpha^r = (\alpha^m)^{\frac{1}{n}}$$

во всех случаях, когда это выражение имеет смысл.

Определение 15. Пусть $\alpha > 1$ и β — действительные числа. *Степенью* числа α *с показателем* β называется такое число γ, что

$$\alpha^b \leqslant \gamma \leqslant \alpha^{b'}$$

где b и b' — любые рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$1 < b \leqslant \beta \leqslant b'.$$

Степень обозначается через α^β. Если $0 < \alpha < 1$, то мы полагаем

$$\alpha^\beta = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-\beta}.$$

Предложение 17. *Для любых действительных чисел $\alpha > 0$ и β их степень α^β существует, единственна и обладает следующими свойствами*:

1) $\alpha^\beta \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$,
2) $\frac{1}{\alpha^\beta} = \alpha^{-\beta}$,
3) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$,
4) $\alpha^\gamma \beta^\gamma = (\alpha\beta)^\gamma$.

Предложение 18. *Для любых действительных чисел* $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, *и* $\beta > 0$ *существует такое единственное число* γ, *что* $\alpha^\gamma = \beta$. *Это число называется* логарифмом *числа* β по основанию α, *обозначается через* $\log_\alpha \beta$ *и обладает следующими свойствами*:

1) $\log_\alpha \beta \cdot \log_\beta \gamma = \log_\alpha \gamma$ (*в частности*, $\log_\alpha \beta = \frac{1}{\log_\beta \alpha}$),
2) $\log_\alpha(\beta\gamma) = \log_\alpha \beta + \log_\alpha \gamma$,
3) $\log_\alpha(\beta^\gamma) = \gamma \log_\alpha \beta$.