КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Говоря нестрого, задача о вычислении определённого интеграла возникает, когда нужно «просуммировать» значения какой-то функции, определённой на отрезке. Аналогично кратные интегралы появляются при «суммировании» функций, определённых на двумерных (двойные интегралы) и трёхмерных (тройные интегралы) областях, кривых (криволинейные интегралы) или поверхностях (поверхностные интегралы).

1. Кратные интегралы

Мы рассмотрим два вида кратных интегралов — двойные и тройные. Приведём два типичных примера ситуаций, в которых такие интегралы возникают.

Пример 1 (вычисление объёма криволинейного бруса). Рассмотрим область $D \subset \mathbb{R}^2$ на плоскости и функцию $f(x, y) > 0$, определённую в этой области. Назовём *криволинейным брусом* множество

$$D_f = \{\, (x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ 0 \leqslant z \leqslant f(x, y) \,\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Что такое объём этого бруса и как его вычислить?

Чтобы ответить на эти вопросы, вспомним, как определялась площадь криволинейной трапеции и рассмотрим некоторое множество попарно не пересекающихся прямоугольников p_i, лежащих внутри области D. Пусть $\xi_i \in p_i$ и s_i — площадь прямоугольника p_i. Положим

$$\underline{V} = \sum_i f(\xi_i) s_i.$$

Аналогичным образом рассмотрим некоторое множество прямоугольников, которые также попарно не пересекаются и объединение которых содержит область D. Положим

$$\overline{V} = \sum_i f(\xi_i) S_i,$$

где S_i — площадь i-го прямоугольника из рассматриваемого множества. Если нижняя грань чисел $\overline{V}$ совпадает с верхней гранью чисел $\underline{V}$, то число

$$V = \inf \overline{V} = \sup \underline{V}$$

называется *объёмом* криволинейного бруса. Стандартное обозначение этой величины —

$$V = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy,$$

и символ, стоящий справа, называется *двойным интегралом* функции f по области D.

Пример 2 (вычисление массы тела). Рассмотрим тело $N \subset \mathbb{R}^3$ и предположим, что внутри этого тела распределена некоторая масса с плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$. Это означает, что если мы возьмём некоторый параллелепипед, содержащий точку (x, y, z), и устремим его объём к нулю, то отношение объёма к массе будет равно значению плотности в рассматриваемой точке.

Пусть задано некоторое множество не пересекающихся параллелепипедов P_i, лежащих внутри N, v_i — их объёмы, и ξ_i — точки, лежащие внутри этих параллелепипедов. Положим

$$\underline{M} = \sum_i \rho(\xi) v_i.$$

Рассмотрим также множество не пересекающихся параллелепипедов с объёмами V_i, объединение которых содержит тело N, и положим

$$\overline{M} = \sum_i \rho(\xi) V_i.$$

Тогда масса тела определена, если

$$\inf \overline{V} = \sup \underline{V}$$

Она обозначается через

$$M = \iiint_N \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

и называется *тройным интегралом* плотности ρ, взятым по телу N.

Дадим теперь точные определения.

Двойные интегралы. Пусть D — квадрируемая область в $\mathbb{R}^2$ и $u = f(x,y)$ — функция, определённая в этой области. Рассмотрим такую систему $\mathcal{D} = \{D_i\}$ квадрируемых областей, что

$$D_i \cap D_j = \varnothing \text{ при } i \neq j, \qquad \cup_i D_i = D.$$

Пусть s_i — площадь i-й области, $\lambda = \max s_i$ и $\xi_i = (x_i, y_i) \in D_i$ — произвольная точка области D_i.

Определение 1. Предел

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_i f(x_i, y_i) s_i,$$

если он существует, называется *двойным интегралом* функции f по области D. При этом сама функция f называется *интегрируемой* в области D.

Заметим, что предел, фигурирующий в определении 1, берётся по всевозможным квадрируемым разбиениям $\mathcal{D}$ области D.

Тройные интегралы. Пусть D — кубируемая область в $\mathbb{R}^3$ и $u = f(x,y,z)$ — функция, определённая в этой области. Рассмотрим такую систему $\mathcal{D} = \{D_i\}$ кубируемых областей, что

$$D_i \cap D_j = \varnothing \text{ при } i \neq j, \qquad \cup_i D_i = D.$$

Пусть v_i — объём i-й области, $\lambda = \max v_i$ и $\xi_i = (x_i, y_i, z_i) \in D_i$ — произвольная точка области D_i.

Определение 2. Предел

$$\iiint_D f(x,y)\, dx\, dy\, dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_i f(x_i, y_i, z_i) v_i,$$

если он существует, называется *тройным интегралом* функции f по области D. При этом сама функция f называется *интегрируемой* в области D.

Заметим, что предел, фигурирующий в определении 2, берётся по всевозможным кубируемым разбиениям $\mathcal{D}$ области D.

Простейшие свойства кратных интегралов. Как видно из сказанного выше, двойные и тройные интегралы определяются почти одинаково — разница состоит в размерностях соответствующих пространств и в понимании *меры* подмножеств в этих пространствах. На плоскости такой мерой является площадь, а в трёхмерном пространстве — объём. Поэтому и свойства таких интегралов одинаковы. Чтобы эти свойства сформулировать, мы будем пользоваться следующей терминологией:

- квадрируемые или кубируемые области будут называться *измеримыми*;
- их площадь или объём называться *мерой*, мера области Ω будет обозначаться через $\mu(\Omega)$;

- двойные и тройные интегралы мы будем называть *кратными* и обозначать через
$$\int_\Omega f\,d\Omega,$$
где Ω — рассматриваемая область.

Во-первых, опишем важный класс интегрируемых функций.

Предложение 1. *Всякая функция, непрерывная в замкнутой области Ω, интегрируема в этой области.*

Замечание 1. Пусть функция f интегрируема в некоторой области Ω и $\Omega' \subset \Omega$ — подмножество, мера которого равна нулю. Изменив произвольным образом значения функции f на Ω', мы получим новую функцию f'. Оказывается, она тоже будет интегрируемой и
$$\int_\Omega f\,d\Omega = \int_\Omega f'\,d\Omega.$$

Сформулируем теперь основные свойства кратных интегралов.

Предложение 2. *Пусть Ω — измеримая область и f — интегрируемая в этой области функция. Тогда:*

1) *Если область Ω разбита на две измеримые непересекающиеся области Ω' и Ω''* (т.е. $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$ *и* $\Omega' \cap \Omega'' = \varnothing$), *то f интегрируема в Ω' и Ω'' и*
$$\int_\Omega f\,d\Omega = \int_{\Omega'} f\,d\Omega' + \int_{\Omega''} f\,d\Omega''.$$
2) *Если c — постоянная, то функция cf также интегрируема и*
$$\int_\Omega cf\,d\Omega = c\int_\Omega f\,d\Omega.$$
3) *Если g — интегрируемая функция, то и функции $f \pm g$ интегрируемы, причём*
$$\int_\Omega (f \pm g)\,d\Omega = \int_\Omega f\,d\Omega \pm \int_\Omega g\,d\Omega.$$
4) *Если g — интегрируемая функция и $f \leqslant g$ и в области Ω, то*
$$\int_\Omega f\,d\Omega \leqslant \int_\Omega g\,d\Omega.$$
5) *Функция $|f|$ также интегрируема и выполняется неравенство*
$$\Big|\int_\Omega f\,d\Omega\Big| \leqslant \int_\Omega |f|\,d\Omega.$$
6) *Если $m \leqslant f \leqslant M$, то*
$$m \leqslant \frac{\int_\Omega f\,d\Omega}{\mu(\Omega)} \leqslant M.$$

Замечание 2. Отношение, стоящее в середине последнего неравенства, называется *средним значением* функции f в области Ω.

Вычисление кратных интегралов. Основной способ вычисления кратных интегралов — это сведéние их к так называемым *повторным*. Возможность такого сведéния обеспечивается теоремами 1 и 2, которые формулируются ниже.

Теорема 1. *Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ограничена:*

1) *сверху графиком функции $y = g(x)$;*
2) *снизу графиком функции $y = h(x)$;*
3) *с боков прямыми $x = a$ и $x = b$.*

Пусть также функция $u = f(x, y)$ интегрируема в рассматриваемой области и при каждом значении $x \in [a, b]$ существует интеграл

$$I(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y)\, dy.$$

Тогда существует интеграл

$$\int_a^b I(x)\, dx = \int_a^b dx \int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y)\, dy$$

и выполняется равенство

$$\int_\Omega f\, d\Omega = \int_a^b dx \int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y)\, dy. \tag{1}$$

Замечание 3. Если область имеет более сложную конфигурацию, чем та, которая указана в теоремах 1 и 2, то, как правило, её можно разбить на простые и для вычисления интеграла воспользоваться пунктом 1 предложения 2.

Пример 3. Вычислим объём тела, в основании которого лежит прямоугольник

$$0 \leqslant x \leqslant a, \qquad 0 \leqslant y \leqslant b,$$

и ограниченного сверху *эллиптическим параболоидом*

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}.$$

Таким образом, нашем случае областью интегрирования Ω является указанный прямоугольник, и мы имеем

$$V = \iint_\Omega \Big(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\Big)\, dx\, dy = \int_0^b dy \int_0^a \Big(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\Big)\, dx = \int_0^b \Big(\frac{a^3}{6p} + \frac{ay^2}{2q}\Big)\, dy = \frac{a^3 b}{6p} + \frac{ab^3}{6q} = \frac{ab}{6}\Big(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q}\Big).$$

Пример 4. Пусть Ω — это круг радиуса R с центром в начале координат. Вычислим интеграл

$$I = \iint_\Omega y^2 \sqrt{R^2 - x^2}\, d\Omega.$$

В силу теоремы 1 имеем

$$I = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} y^2 \sqrt{R^2 - x^2}\, dy = 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} y^2\, dy.$$

Но внутренний интеграл в этом выражении есть

$$\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} y^2\, dy = \frac{1}{3}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}},$$

и поэтому

$$I = \frac{2}{3} \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)^2\, dx = \frac{4}{3} \int_0^R (R^2 - x^2)^2\, dx = \frac{32}{45} R^3.$$

Аналогичный теореме 1 результат для тройных интегралов формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Пусть в плоскости (x, y) задана измеримая область D, а область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ имеет вид*

$$\Omega = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D,\ h(x, y) \leqslant z \leqslant g(x, y) \,\},$$

где $z = g(x, y)$ и $z = h(x, y)$ — некоторые функции двух переменных. Пусть также функция $u = f(x, y, z)$ интегрируема в области Ω и для каждой точки $(x, y) \in D$ существует интеграл

$$I(x, y) = \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Тогда существует интеграл

$$\int_D I(x,y)\,dx\,dy = \int_D dx\,dy \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

и выполняется равенство

$$\int_\Omega f\,d\Omega = \int_D dx\,dy \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \tag{2}$$

Таким образом, вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению простого и двойного интегралов, а двойной, в свою очередь, можно вычислить с помощью теоремы 1.

Пример 5. Пусть Ω — параллелепипед вида

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \quad 0 \leqslant z \leqslant c$$

и $u = x^2 + y^2 + z^2$. Пусть также Ω' — это прямоугольник

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b,$$

лежащий в плоскости (z, y). Тогда

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\Omega'} dx\,dy \int_0^c (x^2+y^2+z^2)\,dz = \iint_{\Omega'} \Big((x^2+y^2)c + \frac{c^3}{3}\Big)\,dx\,dy =$$
$$= \int_0^a dx \int_0^b \Big((x^2+y^2)c+\frac{c^3}{3}\Big)\,dy = \int_0^a \Big(x^2bc+\frac{b^3c}{3}+\frac{bc^3}{3}\Big)\,dx = \frac{a^3bc+ab^3c+abc^3}{3} = \frac{abc}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

Пример 6. Пусть область Ω является тетраэдром, ограниченным плоскостями

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x+y+z = 1$$

и

$$I = \iiint_\Omega \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

Тогда в силу теорем 1 и 2 имеем

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

Но

$$\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\Big)$$

и поэтому

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\Big)\,dy.$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int_0^{1-x} \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\Big)\,dy = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x+1} - \frac{3-x}{4}\Big),$$

и поэтому

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\frac{1}{x+1} - \frac{3-x}{4}\Big)\,dx = \frac{1}{2}\Big(\ln 2 - \frac{5}{8}\Big).$$

Замена переменных. Очень часто вычисление кратных интегралов значительно упрощается (как и в случае «обычных» интегралов) после замены переменных. Опишем, как изменяются подынтегральные выражения при переходе от одних координат к другим. Вначале мы это сделаем в общем виде, который относится и к двумерной (двойные интегралы), и к трёхмерной (тройные интегралы) ситуации, а затем укажем, как общие формулы применяются к каждому конкретному случаю.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$, где $n = 2$ или 3, с координатами $x_1, \dots, x_n$ и некоторую измеримую область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $u = f(x_1, \dots, x_n)$ — интегрируемая в этой области функция и нам нужно вычислить интеграл

$$\int_\Omega f\, d\Omega. \tag{3}$$

Рассмотрим также «второй экземпляр» того же пространства с координатами $t_1, \dots, t_n$ и область Ω' в нём. Сделаем замену переменных

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_n), \dots, x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_n), \tag{4}$$

являющуюся невырожденной в области Ω' и такую,что

$$\Omega = \{\, (x_1, \dots, x_n) \mid x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_n), \dots, x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_n),\ (t_1, \dots, t_n) \in \Omega' \,\}.$$

Напомним, что невырожденность замены переменных (4) означает, что её якобиан

$$\frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(t_1, \dots, t_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_k} & \frac{\partial x_2}{\partial_k t} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_k} \end{pmatrix}$$

является невырожденной матрицей, т.е. её определитель

$$J(x,t) = \left\| \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(t_1, \dots, t_n)} \right\| \tag{5}$$

отличен от нуля в области Ω'. Мы будем также считать, что все частные производные $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$ непрерывны в области Ω'. Тогда можно утверждать следующее:

Теорема 3. *Путь Ω и Ω' — области, связанные между собой невырожденной заменой переменных (4), $u = f(x_1, \dots, x_n)$ — интегрируемая в области Ω функция и $u' = f'(t_1, \dots, t_n)$ — функция в области Ω', имеющая вид*

$$u' = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_n), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_n)).$$

Тогда справедливо равенство

$$\int_\Omega f\, d\Omega = \int_{\Omega'} J(x,t) f'\, d\Omega', \tag{6}$$

где $J(x,t)$ — определитель якобиана рассматриваемой замены переменных.

Пример 7. Вычислим площадь криволинейного четырёхугольника, ограниченного параболами

$$y^2 = px, \quad y^2 = qx, \quad x^2 = ay, \quad x^2 = by, \qquad 0 < p < q, \quad 0 < a < b,$$

воспользовавшись тем, что площадь квадрируемой области Ω есть $\iint_\Omega d\Omega$. С этой целью рассмотрим новые координаты ξ и η, связанные с координатами x и y равенствами

$$x = \sqrt[3]{\xi\eta^2}, \qquad y = \sqrt[3]{\xi^2\eta}. \tag{7}$$

Якобиан замены переменных (7) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\xi^{-\frac{2}{3}}\eta^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}\xi^{\frac{1}{3}}\eta^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3}\xi^{-\frac{1}{3}}\eta^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}\xi^{\frac{2}{3}}\eta^{-\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

и его определитель равен $-\frac{1}{3}$. Поскольку при замене (7) область интегрирования переходит в прямоугольник

$$p \leqslant \xi \leqslant q, \quad a \leqslant \eta \leqslant b,$$

искомая площадь равна $\frac{1}{3}(q-p)(b-a)$.

Наиболее часто — особенно в приложениях кратных интегралов к физике и механике — в качестве новых координат на плоскости выбирают *полярные координаты*, а в пространстве — *цилиндрические* и *сферические координаты*.

Полярные координаты. Вычислим якобиан перехода от прямоугольных координат к полярным. Поскольку

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

имеем

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Значит, определитель этого якобиана равен r, т.е. переход к полярным координатам является невырожденной заменой всюду, кроме начала координат.

Из проделанных вычислений следует формула для вычисления площади фигуры Ω в полярных координатах:

$$S_\Omega = \iint_\Omega dx\,dy = \iint_{\Omega'} r\,dr\,d\varphi, \tag{9}$$

где Ω' — область изменения координат r и φ при изменении координат x и y в области Ω.

Пример 8. Вычислим площадь Ω фигуры, ограниченной кривой[1]

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

Переходя к полярным координатам, получаем уравнение лемнискаты в виде

$$r^2 = 2a^2\cos 2\varphi.$$

Поэтому искомая площадь есть

$$S_\Omega = \iint_\Omega dx\,dy = \iint_{\Omega'} r\,dr\,d\varphi = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r\,dr = 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\,d\varphi = 2a^2.$$

Цилиндрические координаты. Рассмотрим трёхмерное пространство с координатами x, y и z и выберем в плоскости (x,y) полярные координаты r и φ, а координату z оставим прежней. Такая система координат в $\mathbb{R}^3$ называется *цилиндрической*. Таким образом, переход от декартовой к цилиндрической системе координат задаётся равенствами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z \tag{10}$$

и соответствующий якобиан имеет вид

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

и определитель равен r.

[1] Эта кривая называется *лемнискатой*.

Пример 9. Рассмотрим тело Ω, ограниченное снизу эллиптическим параболоидом

$$x^2 + y^2 = 2pz, \qquad p > 0,$$

а сверху — плоскостью $z = a$, $a > 0$. В цилиндрических координатах этот параболоид задаётся уравнением $r^2 = 2pz$, а тело, объём которого мы вычисляем — условиями

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2pa}, \quad \frac{r^2}{2p} \leqslant z \leqslant a.$$

Поэтому

$$V = \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega'} r\,d\varphi\,dr\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2pa}} r\,dr \int_{\frac{r^2}{2p}}^{a} dz = \\ = 2\pi \int_0^{\sqrt{2pa}} r\Big(a - \frac{r^2}{2p}\Big)\,dr = \pi a^2 p.$$

Сферические координаты. Координаты r, φ и ψ в $\mathbb{R}^3$, связанные со стандартными прямоугольными соотношениями

$$x = r\sin\varphi\cos\psi, \quad y = r\sin\varphi\sin\psi, \quad z = r\cos\varphi \tag{12}$$

называются *сферическими*. Якобианом замены перехода к сферическим координатам является

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\psi & \cos\psi \\ r\cos\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\sin\psi & -r\sin\varphi \\ -r\sin\varphi\sin\psi & r\sin\varphi\cos\psi & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

и его определитель равен $r^2\sin\varphi$. Значит, замена (12) является невырожденной при $r \neq 0$, $\varphi \neq 0$ и $\varphi \neq \pi$.

Пример 10. Вычислим объём тела, ограниченного поверхностью

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z.$$

В сферических координатах эта поверхность задаётся уравнением

$$r = a\sqrt[3]{\cos\varphi},$$

и в силу её симметричности имеем

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi}} r^2\sin\varphi\,dr = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \frac{1}{3}\pi a^3.$$

Приложения. Обсудим приложения кратных интегралов к решению механических задач.

Вычисление массы тела. Пусть задана плоская фигура P, масса которой распределена с непрерывной плотностью $\rho = \rho(x,y)$. Тогда *масса* этой фигуры вычисляется по формуле

$$M_P = \iint_P \rho(x,y)\,dx\,dy. \tag{14}$$

Аналогично, для тела $V \subset \mathbb{R}^3$ имеем

$$M_V = \iiint_P \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz. \tag{15}$$

Вычисление статических моментов. *Статические моменты* плоской фигуры относительно осей x и y вычисляются по формулам

$$K_x(P) = \iint_P y\rho(x,y)\,dx\,dy, \quad K_y(P) = \iint_P x\rho(x,y)\,dx\,dy, \tag{16}$$

а статические моменты тела V относительно плоскостей xy, xz и yz — по формулам

$$K_{xy}(V) = \iiint_V z\rho(x,y)\,dx\,dy,\ dz, \quad K_{xz}(V) = \iiint_V y\rho(x,y)\,dx\,dy\,dz, \tag{17}$$
$$K_{yz}(V) = \iiint_V x\rho(x,y)\,dx\,dy\,dz.$$

Определение координат центра тяжести. Из предыдущего следует, что координаты *центра тяжести* плоской фигуры имеют вид

$$\xi_x = \frac{\iint_P x\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_P \rho(x,y)\,dx\,dy}, \quad \xi_y = \frac{\iint_P y\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_P \rho(x,y)\,dx\,dy}. \tag{18}$$

Координаты центра тяжести тела вычисляются по формулам

$$\xi_x = \frac{\iiint_V x\rho(x,y)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_P \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},\ \xi_y = \frac{\iiint_V y\rho(x,y)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_P \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},\ \xi_z = \frac{\iiint_V z\rho(x,y)\,dx\,dy,\ dz}{\iiint_P \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}. \tag{19}$$

Вычисление моментов инерции. Для вычисления *моментов инерции* плоской фигуры относительно осей x и y используются формулы

$$I_x(P) = \iint_P y^2\rho(x,y)\,dx\,dy, \quad I_y(P) = \iint_P x^2\rho(x,y)\,dx\,dy, \tag{20}$$

а моменты инерции тела относительно осей x y и z вычисляются по формулам

$$I_x(V) = \iiint_V (y^2+z^2)\rho(x,y)\,dx\,dy,\ dz, \quad I_y(V) = \iiint_V (x^2+y^2)\rho(x,y)\,dx\,dy\,dz, \tag{21}$$
$$I_z(V) = \iiint_V (x^2+y^2)\rho(x,y)\,dx\,dy\,dz.$$

Аналогичный вид имеют формулы для моментов инерции тела относительно координатных плоскостей

$$I_{xy}(V) = \iiint_V z^2\rho(x,y)\,dx\,dy,\ dz, \quad I_{xz}(V) = \iiint_V y^2\rho(x,y)\,dx\,dy\,dz, \tag{22}$$
$$I_{yz}(V) = \iiint_V x^2\rho(x,y)\,dx\,dy\,dz.$$

Вычисление силы притяжения. В заключение рассмотрим задачу о вычислении *силы притяжения* $F = (F_x, F_y, F_z)$ между телом V с плотностью массы $\rho(x,y,x)$ материальной точкой A с координатами (ξ,η,ζ) массы m. В силу закона Ньютона имеем

$$dF_x = \frac{x-\xi}{r^2}\rho\,dV, \quad dF_y = \frac{x-\eta}{r^2}\rho\,dV, \quad dF_z = \frac{x-\zeta}{r^2}\rho\,dV,$$

и поэтому

$$F_x = \iiint_V \frac{x-\xi}{r^2}\rho\,dx\,dy\,dz, \quad F_y = \iiint_V \frac{x-\eta}{r^2}\rho\,dx\,dy\,dz, \quad F_z = \iiint_V \frac{x-\zeta}{r^2}\rho\,dx\,dy\,dz, \tag{23}$$

где

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Замечание 4. Заметим, что если точка A находится *внутри* притягивающего её тела, то интегралы (23) становятся *несобственными*.

2. Векторный анализ

Векторный анализ, или, как его ещё называют, *теория поля*, — важнейшая составляющая современной математики и физики. Основными понятиями этой теории являются *векторные поля* и *дифференциальные формы.*

Векторные поля. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ и предположим, что к каждой точке θ этого пространства приложен некоторый вектор A_θ.

Определение 3. Множество $A = \{\, A_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}^n \,\}$, где A_θ — вектор, приложенный к точке θ, называется *векторным полем* на пространстве $\mathbb{R}^n$.

Элементы базиса пространства векторов, приложенных к произвольной точке $\theta \in \mathbb{R}^n$, принято обозначать через

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Таким образом, любое векторное поле на $\mathbb{R}^n$ записывается в виде

$$A = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \tag{24}$$

где $a_1, \dots, a_n$ — произвольные функции переменных $x_1, \dots, x_n$, называемые *коэффициентами* векторного поля X. Таким образом, векторные поля — это линейные комбинации частных производных. Например, любое поле на плоскости можно записать в виде

$$A = X \frac{\partial}{\partial x} + Y \frac{\partial}{\partial y}, \tag{25}$$

где $X = X(x, y)$, $Y = Y(x, y)$, а в трёхмерном пространстве — в виде

$$A = X \frac{\partial}{\partial x} + Y \frac{\partial}{\partial y} + Z \frac{\partial}{\partial z}, \tag{26}$$

где X, Y и Z — функции переменных x, y, z.

Определение 4. Кривая L в пространстве $\mathbb{R}^n$, заданная параметрическими уравнениями

$$x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t),$$

называется *интегральной* кривой векторного поля A (или его *траекторией*), если в каждой точке θ этой кривой коэффициенты поля A имеют вид

$$a_1 = \frac{dx_1}{dt}, \dots, a_n = \frac{dx_n}{dt}.$$

Иными словами, кривая L является траекторией, если в каждой её точке вектор скорости этой кривой совпадает с соответствующим вектором рассматриваемого поля.

Для каждого вектора $v = (a_1, \dots, a_n)$, приложенного к некоторой точке $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, то для любой функции $u = f(x_1, \dots, x_n)$, определённой и дифференцируемой в окрестности этой точки, можно определить *производную по направлению* вектора v:

$$v(f) = \lim_{t \to 0} \tfrac{f(\theta + tv) - f(\theta)}{t}. \tag{27}$$

При этом выполняется равенство

$$v(f) = a_1 \frac{\partial f(\theta)}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial f(\theta)}{\partial x_n}. \tag{28}$$

Поэтому, если задано векторное поле A и функция $u = f(x_1, \dots, x_n)$ — функция, то формула

$$A(f) = a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \tag{29}$$

определяет *действие* векторного поля A на функцию f. Результатом этого действия вновь является функция тех же переменных. Заметим, что

$$a_i = A(x_i), \qquad i = 1, \dots, n,$$

так что векторное поле полностью определяется своим действием.

Пусть $(y_1, \dots, y_n)$ — другие координаты в пространстве $\mathbb{R}^n$ и старые координаты $x_1, \dots, x_n$ связаны с новыми соотношениями

$$x_1 = x_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n = x_n(y_1, \dots, y_n).$$

Пусть

$$B = b_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + b_n \frac{\partial}{\partial y_n}$$

— запись поля A в новых координатах. Тогда имеют место равенства

$$a_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_1} b_1 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial y_n} b_n, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{30}$$

или

$$A = \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} B, \tag{31}$$

где

$$\frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

— якобиан рассматриваемой замены координат.

Каждой дифференцируемой функции n переменных можно сопоставить некоторое векторное поле.

Определение 5. Пусть $F = F(x_1, \dots, x_n)$ — дифференцируемая функция. Её *градиентом* называется векторное поле

$$\operatorname{grad} F = \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_n}. \tag{32}$$

В частности, градиент функции двух переменных имеет вид

$$\operatorname{grad} F = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}, \tag{33}$$

а градиент функции трёх переменных записывается в виде

$$\operatorname{grad} F = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}. \tag{34}$$

Заметим, что градиент функции F лежит на нормали к любой поверхности вида $F = \text{const}$ в соответствующей точке..

Наоборот, имея векторное поле, можно построить соответствующую ему функцию.

Определение 6. Пусть A — векторное поле вида (24). Его *дивергенцией* называется функция

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}. \tag{35}$$

В частности, у поля (25) дивергенцией является функция

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}, \tag{36}$$

а у поля (26) — функция

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}. \tag{37}$$

Наконец, если

$$A = X\frac{\partial}{\partial x} + Y\frac{\partial}{\partial y} + Z\frac{\partial}{\partial z}$$

— поле на $\mathbb{R}^3$, то по нему можно построить другое векторное поле.

Определение 7. *Ротором* (или *вихрем*) векторного поля A в трёхмерном пространстве называется поле

$$\operatorname{rot} A = \Big(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\Big)\frac{\partial}{\partial x} + \Big(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\Big)\frac{\partial}{\partial y} + \Big(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\Big)\frac{\partial}{\partial z}. \tag{38}$$

Ротор поля можно записать в более короткой форме. Для этого введём векторное поле[2]

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}, \tag{39}$$

называемое *полем Гамильтона.* Тогда

$$\operatorname{rot} A = \nabla \times A, \tag{40}$$

где $\times$ обозначает векторное произведение.

Замечание 5. Поле Гамильтона удобно и для записи дивергенции и градиента в трёхмерном случае. Именно,

$$\operatorname{div} A = (\nabla, A), \tag{41}$$

где скобки обозначают скалярное произведение, и

$$\operatorname{grad} F = \nabla \cdot F, \tag{42}$$

где «$\cdot$» следует понимать как «умножение вектора справа на скаляр».

Дифференциальные формы. Понятие дифференциальной формы обобщает понятие дифференциала функции.

Определение 8. Выражение вида

$$\omega = a_1\,dx_1 + \dots + a_n\,dx_n, \tag{43}$$

где $a_1, \dots, a_n$ — функции переменных $x_1, \dots, x_n$, называется *дифференциальной* 1-*формой* на пространстве $\mathbb{R}^n$.

В частности, на плоскости 1-формы имеют вид

$$\omega = A(x, y)\,dx + B(x, y)\,dy, \tag{44}$$

а в трёхмерном пространстве —

$$\omega = A(x, y, z)\,dx + B(x, y, z)\,dy + C(x, y, z)\,dz. \tag{45}$$

Кроме 1-форм, рассматриваются также 2-, 3- и т.д. n-формы в пространстве $\mathbb{R}^n$. Не углубляясь в общую теорию таких дифференциальных форм, укажем, что 2-формы на плоскости имеют вид

$$\omega = X(x, y)\,dx\,dy, \tag{46}$$

а 2- и 3-формы в трёхмерном пространстве представляются в виде

$$\omega = A(x, y, z)\,dx\,dy + B(x, y, z)\,dx\,dz + C(x, y, z)\,dy\,dz \tag{47}$$

и соответственно

$$\omega = A(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \tag{48}$$

Замечание 6. Обычные функции от n переменных формально рассматривают как 0-*формы* на пространстве $\mathbb{R}^n$.

[2]Символ ∇ читается *набла.*

Каждой i-форме можно сопоставить $(i+1)$-форму, называемую её *дифференциалом*. Дифференциалы 0-форм задаются равенствами

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy \tag{49}$$

и

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz, \tag{50}$$

т.е. являются уже известными нам дифференциалами функций нескольких переменных. Дифференциалы 1-форм вычисляются по формулам

$$d\omega = \Big(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\Big)\,dx\,dy, \tag{51}$$

если форма ω имеет вид (44), и

$$d\omega = \Big(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\Big)\,dx\,dy + \Big(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\Big)\,dx\,dz + \Big(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\Big)\,dy\,dz \tag{52}$$

для форм вида (47).

Для форм (46) и (48) выполнено равенство

$$d\omega = 0. \tag{53}$$

Пусть на плоскости задана кривая L, с параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Тогда любую 1-форму (44) можно *ограничить* на эту кривую, полагая

$$\omega|_L = \Big(A(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} + B(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}\Big)\,dt \tag{54}$$

Аналогично, формы вида (45) можно ограничивать на пространственные кривые

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

с помощью равенств

$$\omega|_L = \Big(A(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt} + B(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dt} + C(x(t),y(t),z(t))\frac{dz}{dt}\Big)\,dt \tag{55}$$

Пусть теперь S — поверхность в $\mathbb{R}^3$, заданная уравнениями

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v).$$

На такую поверхность можно ограничивать как 1-формы (45), так и 2-формы (47). В случае форм вида (45) имеем

$$\omega|_S = \Big(A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial y}{\partial u} + C\frac{\partial z}{\partial u}\Big)\,du + \Big(A\frac{\partial x}{\partial v} + B\frac{\partial y}{\partial v} + C\frac{\partial z}{\partial v}\Big)\,dv, \tag{56}$$

а для форм (47) ограничение записывается в виде

$$\omega|_S = \Big(A\Big(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\Big) + B\Big(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\Big) + C\Big(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\Big)\Big)\,du\,dv. \tag{57}$$

В последних двух формулах коэффициенты A, B и C также считаются ограниченными на поверхность S, т.е. $A = A(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ и т.д.

Следующее утверждение отражает *инвариантность* дифференциала:

Теорема 4. *Пусть S — поверхность в $\mathbb{R}^3$ и ω — 1-форма. Тогда*

$$(d\omega)|_S = d\big(\,\omega|_S\,\big). \tag{58}$$

Покажем, как дифференциальные формы преобразуются при заменах координат, ограничившись для простоты случаем 1-форм. Пусть, как и выше, $(y_1, \dots, y_n)$ — другие координаты в пространстве $\mathbb{R}^n$ и старые координаты $x_1, \dots, x_n$ связаны с новыми соотношениями

$$x_1 = x_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n = x_n(y_1, \dots, y_n). \tag{59}$$

Пусть $\omega = a_1\, dx_1 + \dots + a_n\, dx_n$ — представление формы в одних координатах и $\rho = b_1\, dy_1 + \dots + b_n\, dy_n$ — в других. Тогда выполняются равенства

$$b_i = a_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \dots + a_n \frac{\partial x_n}{\partial y_i}, \tag{60}$$

или

$$\omega = \left(\frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} \right)^* \rho, \tag{61}$$

где «звёздочка» обозначает *транспонированную матрицу.*

При преобразовании форм по правилу (61) также сохраняется свойство *инвариантности дифференциала*:

Теорема 5. *Пусть задана дифференцируемая функция $u = f(x_1, \dots, x_n)$ и замена переменных* (59). *Проделаем два вычисления*:

1) *вычислим дифференциал функции f относительно переменных x и преобразуем полученную 1-форму по правилу* (61);
2) *заменим в функции f переменные x на переменные y и вычислим дифференциал полученной функции относительно новых переменных.*

Результат будет одним и тем же.

Операции над формами и полями. Если A — векторное поле, а ω — i-форма, то по этой паре всегда можно построить $(i-1)$-форму $\omega(A)$, называемую *подстановкой* поля A в форму ω. Нам понадобятся подстановки полей в 2- и 3-формы, и мы приведём необходимые формулы для плоскости и трёхмерного пространства.

Пусть

$$A = X \frac{\partial}{\partial x} + Y \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \omega = a\, dx\, dy.$$

Тогда

$$\omega(X) = -aY\, dx + aX\, dy. \tag{62}$$

Если $A = X\frac{\partial}{\partial x} + Y\frac{\partial}{\partial y} + Z\frac{\partial}{\partial z}$ — поле в $\mathbb{R}^3$ и

$$\omega = a\, dx\, dy + b\, dx\, dz + c\, dy\, dz \tag{63}$$

— 2-форма, то

$$\omega(A) = -(aY + bZ)\, dx + (aX - cZ)\, dy + (bX + cY)\, dz. \tag{64}$$

Если же $\omega = a\, dx\, dy\, dz$ — 3-форма, то

$$\omega(X) = aZ\, dx\, dy - aY\, dx\, dz + aX\, dy\, dz. \tag{65}$$

Предложение 3. *Пусть $A = X\frac{\partial}{\partial x} + Y\frac{\partial}{\partial y} + Z\frac{\partial}{\partial z}$ — векторное поле в трёхмерном пространстве и*

$$\Omega = dx\, dy\, dz. \tag{66}$$

Сопоставим полю A дифференциальную 1-форму

$$\omega_A = X\, dx + Y\, dy + Z\, dz.$$

Тогда выполняется равенство

$$d\omega_A = \Omega(\operatorname{rot} A), \tag{67}$$

где поле $\operatorname{rot} A$ *определено равенством* (38).

Определение 9. Дифференциальная форма (66) называется *формой объёма* в $\mathbb{R}^3$.

Вторая операция, которая нам понадобится — это *действие* векторных полей на дифференциальные формы. В трёхмерном пространстве это действие определяется следующим образом. Если $\omega = a\,dx + b\,dy + c\,dz$ — 1-форма, то

$$A(\omega) = \Big(X\frac{\partial a}{\partial x} + Y\frac{\partial a}{\partial y} + Z\frac{\partial a}{\partial z} + a\frac{\partial X}{\partial x} + b\frac{\partial Y}{\partial x} + c\frac{\partial Z}{\partial x}\Big)\,dx + \\ + \Big(X\frac{\partial b}{\partial x} + Y\frac{\partial b}{\partial y} + Z\frac{\partial b}{\partial z} + a\frac{\partial X}{\partial y} + b\frac{\partial Y}{\partial y} + c\frac{\partial Z}{\partial y}\Big)\,dy + \\ + \Big(X\frac{\partial c}{\partial x} + Y\frac{\partial c}{\partial y} + Z\frac{\partial c}{\partial z} + a\frac{\partial X}{\partial z} + b\frac{\partial Y}{\partial z} + c\frac{\partial Z}{\partial z}\Big)\,dz. \quad (68)$$

Для 2-формы $\omega = a\,dx\,dy + b\,dx\,dz + c\,dy\,dz$ имеем

$$A(\omega) = \Big(X\frac{\partial a}{\partial x} + Y\frac{\partial a}{\partial y} + Z\frac{\partial a}{\partial z} + a\frac{\partial X}{\partial x} + a\frac{\partial Y}{\partial y} + b\frac{\partial Z}{\partial y} - c\frac{\partial Z}{\partial x}\Big)\,dx\,dy + \\ + \Big(X\frac{\partial b}{\partial x} + Y\frac{\partial b}{\partial y} + Z\frac{\partial b}{\partial z} + a\frac{\partial Y}{\partial z} + b\frac{\partial X}{\partial x} + b\frac{\partial Z}{\partial z} - c\frac{\partial Y}{\partial x}\Big)\,dx\,dz + \\ + \Big(X\frac{\partial c}{\partial x} + Y\frac{\partial c}{\partial y} + Z\frac{\partial c}{\partial z} - a\frac{\partial X}{\partial z} + b\frac{\partial X}{\partial y} + c\frac{\partial Y}{\partial y} + c\frac{\partial Z}{\partial z}\Big)\,dy\,dz. \quad (69)$$

Наконец, для 3-формы $\omega = a\,dx\,dy\,dz$

$$A(\omega) = \Big(X\frac{\partial a}{\partial x} + Y\frac{\partial a}{\partial y} + Z\frac{\partial a}{\partial z} + a\frac{\partial X}{\partial x} + a\frac{\partial Y}{\partial y} + a\frac{\partial Z}{\partial z}\Big)\,dx\,dy\,dz. \quad (70)$$

Таким образом, действие векторных полей переводит i-формы в i-формы.

Для форм и полей на плоскости

$$A(\omega) = \Big(X\frac{\partial a}{\partial x} + Y\frac{\partial a}{\partial y} + a\frac{\partial X}{\partial x} + b\frac{\partial Y}{\partial x}\Big)\,dx + \Big(X\frac{\partial b}{\partial x} + Y\frac{\partial b}{\partial y} + a\frac{\partial X}{\partial y} + b\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)\,dy. \quad (71)$$

и

$$A(\omega) = \Big(X\frac{\partial a}{\partial x} + Y\frac{\partial a}{\partial y} + a\frac{\partial X}{\partial x} + a\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)\,dx\,dy. \quad (72)$$

Если в формуле (70) в качестве ω взять форму объёма, то мы получим следующее утверждение:

Предложение 4. *Имеет место равенство*

$$A(\Omega) = (\operatorname{div} A)\cdot\Omega, \quad (73)$$

где Ω — форма объёма.

Следующий важнейший факт связывает между собой дифференциал формы, операцию подстановки и действие векторного поля на форму:

Теорема 6. *Для любой формы ω и векторного поля A выполняется равенство*

$$A(\omega) = d(\omega(A)) + (d\omega)(A). \quad (74)$$

3. Криволинейные и поверхностные интегралы

Криволинейные интегралы.

Определение 10. Пусть L — кривая в $\mathbb{R}^2$, заданная параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, и $\omega = A\,dx + B\,dy$ — 1-форма. Величина

$$\int_{t_0}^{t_1} \omega|_L = \int_{t_0}^{t_1} \Big(A(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + B(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}\Big)\,dt \quad (75)$$

называется *криволинейным интегралом* формы ω вдоль кривой L.

Определение 11. Пусть L — кривая в $\mathbb{R}^3$, заданная параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, и $\omega = A\,dx + B\,dy + C\,dz$ — 1-форма. Величина

$$\int_{t_0}^{t_1} \omega|_L = \int_{t_0}^{t_1} \Big(A(x(t), y(t), z(t))\frac{dx}{dt} + B(x(t), y(t), z(t))\frac{dy}{dt} + CB(x(t), y(t), z(t))\frac{dz}{dt}\Big)\,dt \qquad (76)$$

называется *криволинейным интегралом* формы ω вдоль кривой L.

Криволинейный интеграл формы ω вдоль кривой L обозначается через

$$\int_L \omega.$$

Механический смысл криволинейного интеграла. Пусть на плоскости задано *поле сил*, т.е. к каждой точке $\theta = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ приложен вектор силы $F = (A, B)$ с составляющими $F_x = A(x, y)$ и $F_y = B(x, y)$. Тогда криволинейный интеграл $\int_L A\,dx + B\,dy$ выражает *механическую работу* силы F, совершаемую вдоль плоской кривой $L \subset \mathbb{R}^2$.

Аналогичный смысл имеет криволинейный интеграл формы $\omega = A\,dx + B\,dy + C\,dz$ вдоль пространственной кривой $L \subset \mathbb{R}^3$.

Геометрический смысл криволинейного интеграла. Перепишем правую часть равенства (75) виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{Ax' + By'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt$$

и обозначим дробь, входящую в подынтегральное выражение через $f(t)$. Тогда рассматриваемый интеграл примет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,ds, \qquad (77)$$

где

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt. \qquad (78)$$

Величина ds, определяемая равенством (78), называется *элементом длины дуги* кривой, а криволинейный интеграл, представленный в виде (77), — *криволинейным интегралом первого типа* (в отличие от интегралов вида (75), которые принято называть *криволинейными интегралами второго типа*).

В частности, если $f = 1$, то интеграл

$$\int_L ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt \qquad (79)$$

представляет собой длину плоской кривой L.

Аналогично, в трёхмерном пространстве криволинейные интегралы первого типа имеют вид

$$\int_L f(t)\,ds = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt, \qquad (80)$$

а длина пространственной кривой измеряется интегралом

$$\int_L ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt \qquad (81)$$

Поверхностные интегралы.

Определение 12. Пусть S — ориентируемая поверхность в $\mathbb{R}^3$, заданная параметрическими уравнениями $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, $(u,v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, где Ω — некоторая область в $\mathbb{R}^2$, и $\omega = A\,dxdy + B\,dxdz + C\,dydz$ — 2-форма. Величина

$$\iint_\Omega \omega|_S = \iint_\Omega \big(A(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\Delta_{xy} + \\ + B(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\Delta_{xz} + C(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\Delta_{yz}\big)\,dudv, \tag{82}$$

где Δ_{xy}, Δ_{xz} и Δ_{yz} — определители матриц

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

соответственно, называется *поверхностным интегралом* формы ω вдоль поверхности S.

Геометрический смысл поверхностного интеграла. Перрепишем правую часть равенства (82) в виде

$$\iint_\Omega \frac{A\Delta_{xy} + B\Delta_{xz} + C\Delta_{yz}}{\sqrt{\Delta_{xy}^2 + \Delta_{xz}^2 + \Delta_{yz}^2}} \sqrt{\Delta_{xy}^2 + \Delta_{xz}^2 + \Delta_{yz}^2}\,dudv \tag{83}$$

и обозначим дробь, входящую в подынтегральное выражение через $f(u,v)$. Тогда рассматриваемый интеграл примет вид

$$\iint_\Omega f(u,v)\,dS, \tag{84}$$

где

$$dS = \sqrt{\Delta_{xy}^2 + \Delta_{xz}^2 + \Delta_{yz}^2}\,dudv. \tag{85}$$

Величина dS, определяемая равенством (85), называется *элементом площади поверхности*, а поверхностный интеграл, записанный в форме (84) — поверхностным интегралов *первого типа* (в отличие он интегралов (82), которые называются поверхностными интегралами *второго типа*).

В частности, если $f = 1$, то величина

$$\iint_\Omega dS \tag{86}$$

выражает *площадь* рассматирваемой поверхности.

Физический смысл поверхностных интегралов станет ясен из материала § 4.

4. Векторный анализ (продолжение)

Замечание 7.