

Пределы

§1. Предел функции

1.1. Определение предела

Пусть a — точка числовой прямой, $a \in (b; c)$. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве

$$E := \{x \mid x \in (b; c) \setminus \{a\}\}.$$

Число a называется пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к a (обозначается $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$), если для любого положительного числа ε ($\forall \varepsilon > 0$) существует такое положительное число δ ($\exists \delta = \delta(\varepsilon)$), что для любого x ($\forall x$) такого, что $0 < |x - a| < \delta$, $x \in E$, выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Замечание. В определении предела нет никаких условий на значение функции $f(x)$ в точке a , более того, нет даже требования, чтобы функция $f(x)$ была определена в точке a .

Если в определении предела функции $f(x)$ заменить множество E на множество $E_+ = E \cap \{x > a\}$ ($E_- = E \cap \{x < a\}$), то получим определения односторонних пределов в точке $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ ($\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$). Берётся правая (левая) полуокрестность точки a , то есть интервал вида $(a, a + \delta)$, $\delta > 0$ ($(a - \delta, a)$).

Пример 1. Показать, что $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 = 16$.

РЕШЕНИЕ. Как следует из определения предела, необходимо оценить разность $|x^2 - 16|$. Имеем, $|x^2 - 16| = |x - 4| \cdot |x + 4|$. Выделим некоторую окрестность точки 4, например, интервал $(3; 5)$. Для всех $x \in (3; 5)$ имеем $|x + 4| < 9$, следовательно, $|x^2 - 16| < 9 \cdot |x - 4|$. Так как δ -окрестность точки $x = 4$ ($4 - \delta; 4 + \delta$) не должна выходить за пределы $(3; 5)$, то берём $\delta = \min \left\{ 1; \frac{\varepsilon}{9} \right\}$, и из предыдущих оценок видно, что из неравенства $0 < |x - 4| < \delta$ следует неравенство $|x^2 - 16| < \varepsilon$. Таким образом, $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 = 16$.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ [$x \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow \infty$] (обозначение: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ [$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$]), если для любого положительного числа ε ($\forall \varepsilon > 0$) существует такое положительное число C ($\exists C = C(\varepsilon)$), что для любого x , такого что $x > C$, $x \in E$

$\left[x < -C, x \in E; |x| > C, x \in E \right]$ выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Пример 2. Показать, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 10x + 100} = 0$.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим луч $x > 20$, на котором будем производить дальнейшие оценки. Для $x > 20$ имеем:

$$x^2 - 10x + 100 > x^2 - 10x = x(x - 10) > \frac{x^2}{2},$$

следовательно,

$$\left| \frac{x \cos x}{x^2 - 10x + 100} \right| < \frac{x}{x^2/2} = \frac{2}{x}.$$

Таким образом, если $C = \max \left\{ 20; \frac{2}{\varepsilon} \right\}$, то из неравенства $x > C$ следует

$$\left| \frac{x \cos x}{x^2 - 10x + 100} \right| < \varepsilon, \text{ то есть } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 10x + 100} = 0.$$

Пример 3. Показать, что функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \rightarrow 0$.

РЕШЕНИЕ. Запишем с использованием символов утверждение “число A не является пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ ”:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_\delta = x(\delta) : 0 < |x_\delta - a| < \delta, x_\delta \in E, |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Если $A = 0$, то возьмём $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ и $x_k = \frac{1}{2\pi k + \pi/2}$, тогда

$$\forall \delta > 0 \exists k \in \mathbb{N} : 0 < x_k < \delta \text{ и } |f(x_k) - 0| = |f(x_k)| = 1 > \varepsilon_0,$$

таким образом, нуль не есть предел $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow 0$. Если же $A \neq 0$, то возьмём $\varepsilon_0 = \frac{|A|}{2}$ и $x_k = \frac{1}{2\pi k}$. Тогда

$$\forall \delta > 0 \exists k \in \mathbb{N} : 0 < x_k < \delta \text{ и } |f(x_k) - A| = |A| > \varepsilon_0,$$

таким образом, и любое отличное от нуля число не есть предел функции $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow 0$.

1.2. Свойства пределов

Сформулируем основные утверждения, используемые для вычисления пределов.

Если существуют $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$, то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x); \\ \lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \cdot f_2(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x); \end{aligned}$$

если $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)};$$

если в некоторой проколотой окрестности точки $x = a$ имеем

$$f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x) \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A.$$

Пример 4. Найти $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3x^2 + 4x - 5)$.

РЕШЕНИЕ. Пользуясь утверждениями о пределе суммы и произведения получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3x^2 + 4x - 5) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 5 = 23.$$

Пример 5. Найти $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 2x + 1}$.

РЕШЕНИЕ. Пользуясь утверждениями о пределе отношения получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 2x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 2x + 1)} = \frac{(-2)^2 - 1}{(-2)^3 - 2 \cdot (-2) + 1} = \frac{3}{-3} = -1.$$

Замечание. В дальнейшем будем пользоваться тем, что для любой элементарной функции $f(x)$ и любой точки a из её области определения справедливо соотношение $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

При вычислении пределов часто применяется следующая теорема о пределе композиции: если функция $f(x)$ и существует $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a$, то

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(x(t)) = f \left(\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) \right) = f(a).$$

Пример 6. Найти $\lim_{x \rightarrow 4\pi} \ln \left(1 + \sqrt{1 + \sin^2 \frac{x}{2}} \right)$.

РЕШЕНИЕ. Напишем цепочку соотношений:

$$y_1 = \frac{x}{2}, \quad y_2 = \sin y_1, \quad y_3 = y_2^2, \quad y_4 = 1 + y_3,$$

$$y_5 = \sqrt{y_4}, \quad y_6 = 1 + y_5, \quad y_7 = \ln y_6.$$

Применяя последовательно теорему о пределе композиции, получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4\pi} y_1(x) &= 2\pi, & \lim_{x \rightarrow 4\pi} y_2(x) &= \lim_{y_1 \rightarrow 2\pi} \sin y_1 = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 4\pi} y_3(x) &= \lim_{y_2 \rightarrow 0} y_2^2 = 0, & \lim_{x \rightarrow 4\pi} y_4(x) &= \lim_{y_3 \rightarrow 0} (1 + y_3) = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 4\pi} y_5(x) &= \lim_{y_4 \rightarrow 1} \sqrt{y_4} = 1, & \lim_{x \rightarrow 4\pi} y_6(x) &= \lim_{y_5 \rightarrow 1} (1 + y_5) = 2, \\ \lim_{x \rightarrow 4\pi} \ln \left(1 + \sqrt{1 + \sin^2 \frac{x}{2}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 4\pi} y_7(x) = \lim_{y_6 \rightarrow 2} \ln y_6 = \ln 2. \end{aligned}$$

Замечание. В теореме о пределе композиции условие непрерывности функции $f(x)$ в точке $x = a$ нельзя заменить на условие существования предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$. Дело в том, что если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a$ и $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x(t))$ существует, то верно равенство $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x(t)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, но существование предела $f(x(t))$ не следует из существования пределов функций $f(x)$ и $x(t)$.

Пусть a — точка расширенной числовой прямой (то есть число или один из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞). Обозначим через $U(a)$ окрестность точки a : если a — число, то $U(a)$ — интервал с центром в точке a ; если $a = +\infty$, то $U(a)$ — любой луч $x > \alpha$; если $a = -\infty$, то $U(a)$ — любой луч $x < \alpha$; если $a = \infty$, то $U(a)$ — объединение двух лучей: $\{x > \alpha\} \cup \{x < \alpha\}$. Обозначим через $\dot{U}(a)$ проколотую окрестность точки a : $\dot{U}(a) = U(a) \setminus \{a\}$.

1.3. Бесконечно большая функция

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow a$, если для любого положительного числа C существует окрестность $U(a)$ такая, что $|f(x)| > C$ для любого $x \in \dot{U}(a) \cap E$ (E — множество определения функции $f(x)$).

Заменяя в этом определении неравенство $|f(x)| > C$ на $f(x) > C$ ($f(x) < -C$) получаем определение положительной (отрицательной) бесконечно большой функции.

Утверждение, что функция $f(x)$ при $x \rightarrow a$ является бесконечно большой (положительной бесконечно большой, отрицательной бесконечно большой) записывается в виде:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \right).$$

Сформулируем основные соотношения для бесконечно больших функций.

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $f(x) \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$, и обратно, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Если $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A$, то $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = \infty$.

Если $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = +\infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = +\infty$.

Если $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \infty$.

Если $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A \neq 0$, $f_2(x) \neq 0$ и $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty$.

Если $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = \infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$.

Пример 7. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^3 + 4x + 2)}{\ln(x^{10} + x^3 + x^2)}$.

РЕШЕНИЕ. Пользуясь утверждением о пределе произведения, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^3 + 4x + 2)}{\ln(x^{10} + x^3 + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^3 + 4x + 2) \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^{10} + x^3 + x^2)} = \ln 2 \cdot 0 = 0.$$

Пример 8. Найти $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2^x}$.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим обратную величину $\frac{2^x}{x} = 2^x \cdot \frac{1}{x}$. Применяем утверждение о пределе произведения и получаем:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2^x \cdot \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

откуда следует, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2^x} = -\infty$.

Пример 9. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 4x} + x)$.

РЕШЕНИЕ. Требуется вычислить предел суммы двух бесконечно больших при $x \rightarrow +\infty$ функций, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 4x} + x) = +\infty.$$

§2. Вычисление предела в случае неопределённости

При вычислении пределов

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)), \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$$

могут возникнуть ситуации, когда непосредственное применение теорем о свойствах пределов и бесконечно больших функций не даёт возможность их вычислить. Такое положение возможно в следующих случаях.

1. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$:

- а) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (символически обозначается $\left[\frac{0}{0}\right]$);
 б) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ (символически обозначается $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$).
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x))$:
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ (символически обозначается $[0 \cdot \infty]$).
3. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$:
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ (символически обозначается $[\infty - \infty]$).

В том случае, когда имеет место неопределённость, для вычисления предела - “раскрытия неопределённости” - преобразовывают выражение так, чтобы получить возможность его вычислить. Для таких преобразований используются или тождественные соотношения или сравнения поведения функции при стремлении $x \rightarrow a$ (соотношения эквивалентностей).

Функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ при $x \rightarrow a$ ($f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow a$), если существует такая функция $\alpha(x)$, что $f(x) = \alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$.

Соотношения эквивалентностей обладают следующими свойствами (везде подразумевается, что $x \rightarrow a$).

1. Если $f(x) \sim g(x)$, то $g(x) \sim f(x)$.
2. Если $f(x) \sim g(x)$ и $g(x) \sim h(x)$, то $f(x) \sim h(x)$.
3. Если $f(x) \sim g(x)$ и $h(x) \sim s(x)$, то $f(x) \cdot h(x) \sim g(x) \cdot s(x)$.
4. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$, то $f(x) \sim k$.

Справедливы следующие соотношения (два основных предела):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

В другой записи:

$$\sin x \sim x \text{ при } x \rightarrow 0, \quad e^x - 1 \sim x \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Отсюда получаем, что при $x \rightarrow 0$:

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \sim x,$$

$$\arcsin x \sim \sin(\arcsin x) = x, \quad \ln(1+x) \sim e^{\ln(1+x)} - 1 = x.$$

Сведём полученные и аналогичные им соотношения в таблицу.

Эквивалентности при $x \rightarrow 0$
$\sin x \sim x$
$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
$\operatorname{tg} x \sim x$
$\arcsin x \sim x$
$\operatorname{arctg} x \sim x$
$e^x - 1 \sim x$
$a^x - 1 \sim x \ln a$
$\ln(1+x) \sim x$
$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$
$(1+x)^m - 1 \sim mx$

Пример 1. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad (m \geq 1, n \geq 1, a_n b_m \neq 0).$$

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^m .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^{n-m} + a_{n-1} x^{n-1-m} + \dots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a_n x^{n-m} + a_{n-1} x^{n-1-m} + \dots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m} \right)} = \\ &= \frac{1}{b_m} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a_n x^{n-m} + a_{n-1} x^{n-1-m} + \dots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m} \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{при } m > n, \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{при } m = n, \\ \infty & \text{при } m < n. \end{cases}$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 2x^2 - 4}{6x^2 + 8x + 9}$.

РЕШЕНИЕ. Согласно примеру 1 $m = 2$, $n = 3$, отсюда $m < n$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 2x^2 - 4}{6x^2 + 8x + 9} = \infty.$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3 - 3x + 2}{8x^4 - 6x^3 + 5x + 1}$.

РЕШЕНИЕ. Согласно примеру 1 $m = 4$, $n = 3$, отсюда $m > n$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3 - 3x + 2}{8x^4 - 6x^3 + 5x + 1} = 0.$$

Пример 4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 6x^2 - 7x + 2}{8x^3 - 12x + 9}$.

РЕШЕНИЕ. Согласно примеру 1 $m = n = 3$, $b_m = 8$, $a_n = 5$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 6x^2 - 7x + 2}{8x^3 - 12x + 9} = \frac{5}{8}.$$

Пример 5. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt[3]{8x^3 + 7}}{\sqrt[5]{x^5 + 9}}.$$

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Разделим числитель и знаменатель на x .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt[3]{8x^3 + 7}}{\sqrt[5]{x^5 + 9}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} + \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 7}}{x}}{\frac{\sqrt[5]{x^5 + 9}}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} + \sqrt[3]{8 + \frac{7}{x^3}}}{\sqrt[5]{1 + \frac{9}{x^5}}} = \frac{1 + 2}{1} = 3. \end{aligned}$$

Пример 6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 4x + 2)}{\ln(x^{10} + x^3 + x)}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Сделаем следующие преобразования.

$$\frac{\ln(x^2 + 4x + 2)}{\ln(x^{10} + x^3 + x)} = \frac{2 \ln |x| + \ln \left(1 + \frac{4x + 2}{x^2}\right)}{10 \ln |x| + \ln \left(1 + \frac{x^3 + x}{x^{10}}\right)} = \frac{2 + \frac{\ln \left(1 + \frac{4x + 2}{x^2}\right)}{\ln |x|}}{10 + \frac{\ln \left(1 + \frac{x^3 + x}{x^{10}}\right)}{\ln |x|}}.$$

Применяя соотношения для бесконечно больших функций и для вычисления пределов, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{4x + 2}{x^2}\right)}{\ln |x|} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{4x + 2}{x^2}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln |x|} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{x^3 + x}{x^{10}}\right)}{\ln |x|} &= 0, \end{aligned}$$

откуда, применяя соотношения для вычисления пределов, окончательно получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 4x + 2)}{\ln(x^{10} + x^3 + x)} = \frac{2 + 0}{10 + 0} = \frac{1}{5}.$$

Пример 7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида $[\infty - \infty]$. Если $x < 0$, то

$$\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x = \frac{4x + 5}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x} = \frac{4 + \frac{5}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} - 1},$$

следовательно, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x) = -2$.

Пример 8. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 9x} - x)$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида $[\infty - \infty]$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 9x} - x &= \frac{x^2 + 9x - x^2}{\sqrt{x^2 + 9x} + x} = \frac{9x}{\sqrt{x^2 + 9x} + x} = \\ &= \frac{9}{\sqrt{\frac{x^2 + 9x}{x^2}} + \frac{x}{x}} = \frac{9}{\sqrt{1 + \frac{9}{x}} + 1}, \end{aligned}$$

следовательно, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 9x} - x) = \frac{9}{2}$.

Пример 9. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4x + 3}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. В проколотой окрестности точки $x = 1$ функции

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 4x + 3} \text{ и } \frac{x^2 + x + 1}{x - 3}$$

тождественно равны, значит, имеют при $x \rightarrow 1$ один и тот же предел. Предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x - 3}$ вычисляется с использованием утверждения о пределе частного и пределе многочлена. Итак,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4x + 3}}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x - 3}} = -\frac{3}{2}.$$

Пример 10. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Пользуясь соотношениями эквивалентности получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x \cdot (1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

Замечание. Внимание! Соотношения эквивалентностей можно применять только в случае, когда функция, которую заменяют на эквивалентную, является множителем всего выражения. Замену на эквивалентную функцию в отдельном слагаемом алгебраической суммы делать нельзя.

В случае, когда $\lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0$, справедливы следующие соотношения, следующие из определения эквивалентных функций и теоремы о пределе композиции функций.

Эквивалентности при $x \rightarrow a$ $\lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0$
$\sin t(x) \sim t(x)$ $1 - \cos t(x) \sim \frac{t^2(x)}{2}$ $\operatorname{tg} t(x) \sim t(x)$ $\arcsin t(x) \sim t(x)$ $\operatorname{arctg} t(x) \sim t(x)$ $e^{t(x)} - 1 \sim t(x)$ $a^{t(x)} - 1 \sim t(x) \ln a$ $\ln(1 + t(x)) \sim t(x)$ $\log_a(1 + t(x)) \sim \frac{t(x)}{\ln a}$ $(1 + t(x))^m - 1 \sim m \cdot t(x)$

Пример 11. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\arcsin(x+3)}{x^2+3x}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Функция

$$\arcsin(x+3) = \arcsin t(x), \text{ где } t(x) = x+3 \text{ и } \lim_{x \rightarrow -3} t(x) = 0,$$

поэтому справедливо соотношение $\arcsin(x+3) \sim x+3$ при $x \rightarrow -3$. Итак,

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\arcsin(x+3)}{x^2+3x} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2+3x} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x(x+3)} = -\frac{1}{3}.$$

Пример 12. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{1 - \cos 15x}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Рассмотрим функцию

$$1 - \cos 10x = 1 - \cos t(x), \text{ где } t(x) = 10x \text{ и } \lim_{x \rightarrow 0} 10x = 0,$$

поэтому $1 - \cos 10x \sim \frac{(10x)^2}{2}$. Аналогично, $1 - \cos 15x \sim \frac{(15x)^2}{2}$, откуда получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{1 - \cos 15x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(10x)^2}{(15x)^2} = \frac{4}{9}.$$

Пример 13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4^x - 64}{x - 3}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Представим функцию, стоящую в числителе, в виде

$$4^x - 64 = 4^x - 4^3 = \left(\frac{4^x}{4^3} - 1\right) \cdot 4^3 = 4^3 \cdot (4^{x-3} - 1).$$

Функция $4^{x-3} - 1 = 4^{t(x)} - 1$, где $t(x) = x - 3$ и $\lim_{x \rightarrow 3} t(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$, отсюда видно, что $4^{x-3} - 1 \sim (x - 3) \ln 4$ при $x \rightarrow 3$. Вычислим предел

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4^x - 64}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4^3 \cdot \ln 4 \cdot (x - 3)}{x - 3} = 4^3 \cdot \ln 4.$$

Пример 14. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 10^x}{3^x - 7^x}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Рассмотрим выражение, стоящее в числителе: $4^x - 10^x = \left[\left(\frac{4}{10}\right)^x - 1\right] \cdot 10^x$. Легко заметить, что при $x \rightarrow 0$ $\left(\frac{4}{10}\right)^x - 1 \sim x \ln \frac{4}{10}$. Рассмотрим выражение, стоящее в знаменателе: $3^x - 7^x = \left[\left(\frac{3}{7}\right)^x - 1\right] \cdot 7^x$ и при $x \rightarrow 0$ $\left(\frac{3}{7}\right)^x - 1 \sim x \ln \frac{3}{7}$. Получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 10^x}{3^x - 7^x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\left(\frac{4}{10}\right)^x - 1\right) \cdot 10^x}{\left(\left(\frac{3}{7}\right)^x - 1\right) \cdot 7^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \ln \frac{4}{10} \cdot 10^x}{x \cdot \ln \frac{3}{7} \cdot 7^x} = \\ &= \frac{\ln \frac{4}{10}}{\ln \frac{3}{7}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x}{7^x} = \frac{\ln \frac{4}{10}}{\ln \frac{3}{7}} = \frac{\ln \frac{2}{5}}{\ln \frac{3}{7}}. \end{aligned}$$

Пример 15. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Функция, стоящая в числителе $\sqrt[3]{1+2x}-1 \sim (2x) \cdot \frac{1}{3}$, так как $\lim_{x \rightarrow 0} t(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$, отсюда получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} \cdot 2x}{x} = \frac{2}{3}.$$

Пример 16. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{x/2}-1}{\ln(1+3x)}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Функция, стоящая в числителе $7^{x/2} - 1 \sim \frac{x}{2} \ln 7$ при $x \rightarrow 0$, а функция, стоящая в знаменателе $\ln(1+3x) \sim 3x$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{x/2} - 1}{\ln(1+3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2} \ln 7}{3x} = \frac{\ln 7}{6}.$$

Пример 17. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[3]{1-3x}}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1+2x} = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[7]{1-3x} = 1$, то представим выражение, стоящее в числителе в виде

$$\sqrt[3]{1+2x} - \sqrt[7]{1-3x} = \sqrt[3]{1+2x} - 1 + 1 - \sqrt[7]{1-3x}$$

и вычислим сумму пределов:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - \sqrt[7]{1-3x}}{\sqrt[8]{1+x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{\sqrt[8]{1+x} - 1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[7]{1-3x}}{\sqrt[8]{1+x} - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} \cdot 2x}{\frac{1}{8} \cdot x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{7} \cdot 3x}{\frac{1}{8} \cdot x} = \frac{16}{3} + \frac{24}{7} = \frac{184}{21}. \end{aligned}$$

Очень часто при работе с функциями вида:

$$\ln g(x) \text{ и } (g(x))^m - 1, \text{ где } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1,$$

используется преобразование

$$g(x) = (g(x) - 1) + 1 = t(x) + 1, \text{ где } t(x) = g(x) - 1 \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\ln g(x) \sim g(x) - 1 \text{ и } (g(x))^m - 1 \sim m \cdot (g(x) - 1), \text{ где } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1.$$

Пример 18. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Рассмотрим выражение, стоящее в знаменателе, в окрестности нуля.

$$\sqrt{1+x \sin x} - \cos x = \cos x \cdot \left(\sqrt{\frac{1+x \sin x}{\cos^2 x}} - 1 \right).$$

Выражение, стоящее под знаком корня, стремится к 1: $\frac{1+x \sin x}{\cos^2 x} \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$. Представим это выражение в виде

$$\frac{1+x \sin x}{\cos^2 x} = 1 + \left(\frac{1+x \sin x}{\cos^2 x} - 1 \right) = 1 + \frac{1+x \sin x - \cos^2 x}{\cos^2 x}.$$

Отсюда и из сказанного выше следует, что

$$\sqrt{\frac{1+x \sin x}{\cos^2 x}} - 1 \sim \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1+x \sin x - \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 x + x \sin x}{\cos^2 x}.$$

Перейдём к вычислению предела.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x)^2}{\cos x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 x + x \sin x}{\cos^2 x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (3x)^2}{\sin x(\sin x + x)} = 18 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(\sin x + x)} = 18 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x + x}. \end{aligned}$$

Для вычисления последнего предела применим свойство:

$$\text{если } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq 0, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{b}.$$

Находим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 + 1 = 2.$$

Отсюда получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x + x} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x} = 18 \cdot \frac{1}{2} = 9.$$

Пример 19. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{3x-1}{3x-6}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида $[0 \cdot \infty]$. Рассмотрим функцию $\ln \frac{3x-1}{3x-6}$. Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{3x-6} = 1$, то представим выражение, стоящее под знаком логарифма, в виде

$$\frac{3x-1}{3x-6} = 1 + \left(\frac{3x-1}{3x-6} - 1 \right) = 1 + \frac{5}{3x-6} = 1 + t(x),$$

$$\text{где } \lim_{x \rightarrow \infty} t(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{3x-6} = 0.$$

Справедливо соотношение

$$\ln \frac{3x-1}{3x-6} = \ln \left(1 + \frac{5}{3x-6} \right) \sim \frac{5}{3x-6}.$$

Вычислим предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{3x-1}{3x-6} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{5}{3x-6} = \frac{5}{3}.$$

§3. Вычисление предела степенно-показательной функции

Степенно-показательной функцией называется функция вида $(u(x))^{v(x)}$, $u(x) > 0$.

Пользуясь непрерывностью показательной функции, получаем

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x)^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{v(x) \ln u(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} (v(x) \ln u(x))}.$$

Таким образом, нахождение предела степенно-показательной функции сводится к нахождению предела $\lim_{x \rightarrow a} (v(x) \ln u(x))$.

Если $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} \ln u(x) = B$, то $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = e^B$, так как

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln u(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \ln u(x)} = e^B.$$

Отсюда,

$$e^{\lim_{x \rightarrow a} (v(x) \ln u(x))} = e^{A \cdot B} = (e^B)^A = \left(\lim_{x \rightarrow a} u(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} v(x)}.$$

Другими словами, если

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = u, \quad u > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow a} v(x) = v, \quad \text{то} \quad \lim_{x \rightarrow a} u(x)^{v(x)} = u^v.$$

Если $\lim_{x \rightarrow a} (v(x) \ln u(x)) = +\infty$, то и $e^{(v(x) \ln u(x))} \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow a$. Если $\lim_{x \rightarrow a} (v(x) \ln u(x)) = -\infty$, то $e^{(v(x) \ln u(x))} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$.

Отсюда видно, что если $\lim_{x \rightarrow a} (v(x) \ln u(x)) = \infty$ и произведение $v(x) \ln u(x)$ не сохраняет знак ни в какой проколотовой окрестности точки a , то функция $u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$ не имеет предела при $x \rightarrow a$.

Пример 1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi x}{4} \right)^{x^2+5}$.

РЕШЕНИЕ. Так как $\lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{\pi x}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 5) = 6$, то

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi x}{4} \right)^{x^2+5} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^6 = \frac{1}{8}.$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{3x^2+1} \right)^{\ln x}$.

РЕШЕНИЕ. Представим $\left(\frac{x^2+3}{3x^2+1} \right)^{\ln x}$ в виде:

$$\left(\frac{x^2+3}{3x^2+1} \right)^{\ln x} = e^{\ln x \cdot \ln \frac{x^2+3}{3x^2+1}}.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3}{3x^2+1} = \frac{1}{3}$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \cdot \ln \frac{x^2+3}{3x^2+1} = -\infty$, следовательно

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{3x^2+1} \right)^{\ln x} = 0.$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin^2 x)^{-\frac{1}{x^2}}$.

РЕШЕНИЕ. Представим $(\sin^2 x)^{-\frac{1}{x^2}}$ в виде:

$$(\sin^2 x)^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{x^2} \ln \sin^2 x}.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} \ln \sin^2 x\right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\sin^2 x)^{-\frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

Пусть в произведении $v(x) \ln u(x)$ предел одного из сомножителей при $x \rightarrow a$ равен нулю, а второй сомножитель является бесконечно большой функцией при $x \rightarrow a$. Такое возможно в трёх случаях:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty$ (символически обозначается $[\infty^0]$);
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ (символически обозначается $[0^0]$);
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 1$ (символически обозначается $[1^\infty]$).

В этих случаях для вычисления пределов применяют приёмы, которые были показаны при вычислении пределов в случаях неопределённостей.

Пример 4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0+} (1 + \sin x)^{\frac{1}{2x}}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида $[1^\infty]$. Представим в виде:

$$(1 + \sin x)^{\frac{1}{2x}} = e^{\frac{1}{2x} \ln(1 + \sin x)}.$$

Вычислим

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1 + \sin x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Получим

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (1 + \sin x)^{\frac{1}{2x}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{a^x} &= 0 \quad (a > 1, p > 0), \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^q x}{x^p} &= 0 \quad (p > 0, q > 0), \\ \lim_{x \rightarrow 0+} x^p \ln^q x &= 0 \quad (p > 0, q > 0). \end{aligned}$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида $[0^0]$. Представим $x^x = e^{x \ln x}$. Так как $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = 0$, то $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = e^0 = 1$.

Пример 6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2}{x-4}\right)^{\frac{1}{x}}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида $[\infty^0]$. Представим

$$\left(\frac{5x^2}{x-4}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln \frac{5x^2+1}{x-4}}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{5x^2}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \left(x \cdot \frac{5x + \frac{1}{x}}{x-4} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(\ln x + \ln \frac{5x + \frac{1}{x}}{x-4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{5x^2 + 1}{x^2 - 4x} = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда окончательно получим

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2}{x-4}\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить предел:

1. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 5x^2 + 6x + 1)$;
2. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$;
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x - 1}{3x^2 + x + 2}$;
4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$;
5. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 6}$;
6. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 4x}$;
7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{1 - \cos 2x}$;
8. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$;
9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$;
10. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 6x + 8}{x^3 + 8}$;
11. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x - 3}}$;
12. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$;
13. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \sin x}$;
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 4}{x - 2}$;

15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2+5x+1}{3+14x^2+2x};$
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3-7x}{1-2x^3};$
17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{x^2+2};$
18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+4}{x^2+5};$
19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}-x}{3x+5};$
20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{10}(x^2+1)}{(3x+1)^2(x+5)^5(x-1)^5};$
21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+1)^{50}}{(x+1)^{100}};$
22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt[3]{8x^3+1}}{\sqrt{x^5+3}};$
23. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1};$
24. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1};$
25. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{4x^2-1}}{x+7};$
26. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4+n^2+1};$
27. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt[3]{x^3+2}}{7x+\sqrt[4]{x^4+1}};$
28. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}};$
29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+1}{4-x^2} + 2^{\frac{1}{x-1}} \right);$
30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x};$
31. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x};$
32. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+4x}-x);$
33. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x-4});$
34. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3x+1});$
35. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-\sqrt{x^2+x+1});$
36. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-\sqrt{x^2-a^2});$
37. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{3+x+x^2}}{x^2-3x+2} - \frac{\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2} \right);$
38. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}};$
39. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x};$
40. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x^2}-x);$

41. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x^2} - x);$
42. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt{1+x^2}}{x^3 + 2x^2};$
43. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{\sqrt{3x^2+1} - 1};$
44. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x};$
45. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 5x};$
46. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 10x}{\sin 9x};$
47. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x};$
48. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2};$
49. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x};$
50. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sqrt{x+1} - 1};$
51. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(2x-1)}{4x^2-1};$
52. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{2x};$
53. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x};$
54. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sin(x-3)}{x^2-9} + 4^{-\frac{1}{(x-3)^2}} \right);$
55. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) - \cos(a-x)}{x};$
56. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{\frac{1}{\cos 2x} - 1};$
57. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+b) + \sin(x-b)}{2x};$
58. $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x;$
59. $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \sin \frac{x}{3^n};$
60. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2};$
61. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x};$
62. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{x};$
63. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[7]{x} - 1}{\sqrt[8]{x} - 1};$
64. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1-3x^2} - 1};$
65. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - 1}{\sqrt[5]{\cos 2x} - 1};$
66. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[5]{x} - 1)(2^{x-1} - 1)}{\cos(x-1) - 1};$

67. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{4}{3}} - 1}{x^{\frac{2}{3}} - 1}$;
68. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}}$;
69. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{3x}$;
70. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$;
71. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - 1}{\sin^2 3x}$;
72. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$;
73. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg \frac{x}{10}}{x - 10}$;
74. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$;
75. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$;
76. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln \cos \frac{\pi}{n}$.
77. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \log_2 x}{x - 2}$;
78. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg} x}$;
79. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4^x - 64}{x - 3}$;
80. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$;
81. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{\sin 4x - \sin 3x}$;
82. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{4+x}{2+x}$;
83. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{\arcsin x}$;
84. $\lim_{x \rightarrow \infty} x (\ln(2x + 5) - \ln(2x + 1))$;
85. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1+10x)}{\log_7(1+5x)}$;
86. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{e^{5x} - 1}$;
87. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{3^x - 1}$;
88. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 1}{\arccos x}$;
89. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\operatorname{tg} x} - 3^{\sin x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$;
90. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4^{x-2} - 1}{3^{x-2} - 1}$;
91. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5^x - 5^5}{\operatorname{arctg}(x-5)}$;
92. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{e^{x-1} - 1}$;
93. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-2x)}$;

94. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{2^{\sin 3x} - 1}$;
95. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln \ln x}{2x - 2e}$;
96. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_3 x - 1}{x - 3}$;
97. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$;
98. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$;
99. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right)^{2x^2}$;
100. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 3x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$;
101. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{n} \right)^n$;
102. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{\sqrt{n}} \right)^n$;
103. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;
104. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;
105. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$;
106. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sin x}{\sin 2} \right)^{\frac{1}{x-2}}$;
107. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln(n+4) - \ln n)$;
108. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln n - \ln(n+2))$;
109. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} + x)^{\frac{1}{x}}$;
110. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{\ln \cos x}}$;
111. $\lim_{x \rightarrow 0} (2^x + \sin 3x)^{\operatorname{ctg} 3x}$;
112. $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\frac{1}{\sin(x-1)}}$;
113. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x + 2x^2)^{\frac{1}{x^2}}$;
114. $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{1/\cos \frac{\pi x}{2}}$;
115. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{x^2} + \cos x \right)^{\frac{1}{x^2}}$;
116. $\lim_{x \rightarrow 5} \left(2 - \frac{x}{5} \right)^{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{5}}$;
117. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{7+x} \right)^{1/\sin \frac{2}{x}}$;
118. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - 1}{\sqrt[3]{1+3x^2} - 1}$;

119. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x};$
120. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{3 + 2x};$
121. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - 3x});$
122. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sin(x-1)};$
123. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}} + 2^{-x^2} \right);$
124. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x};$
125. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-5^n}{1+5^{n+1}};$
126. $\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{3-10^n}{4+10^{n+1}};$
127. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x (\sqrt[3]{1+3x^2} - 1)}{x \ln \cos 3x};$
128. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}} \frac{2^{3x} - \sqrt{2}}{6x - 1};$
129. $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x \log_2 \frac{3+x}{4+x};$
130. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(1-x)}{1-x^2};$
131. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{7}{x} \right)^{x^2};$
132. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 2}{\sin 5x - \sin 4x};$
133. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 5x + 6) \sin(x-2)}{x^2 - 4x + 4};$
134. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^a - 2^a}{x^b - 2^b};$
135. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{2x}};$
136. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{1 + \sin x} - 1 + \operatorname{tg} x}{x};$
137. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{\sqrt[3]{1+x^3} - 1};$
138. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^x}{x};$
139. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos(3x-9) - \cos(2x-6)}{\sqrt{x^2 - 6x + 10} - 1};$
140. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\sqrt{x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4}} - 1};$
141. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\log_3(3+x^2) - 1};$
142. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{\log_3 x - 1};$
143. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_4 \cos(x-1)}{\sqrt[5]{2+x^2} - 2x - 1};$
144. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4^x - 16}{\sqrt[5]{3-x} - 1};$

145. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+5 \sin x}{x+1}$;
146. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-7}}{x^2-3x-4}$;
147. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-7x-8}$;
148. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}{3\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x+1}}$;
149. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+3x)+\log_3(1-3x)}{x^2}$;
150. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sin x - \sin 5}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$;
151. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{7}}{x-7}$;
152. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cos \pi x}{\operatorname{ctg} 7\pi x}$;
153. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{36x^2 - \pi^2}$;
154. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^x - 8}{\sin \pi x}$;
155. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{\sqrt{3x} - \sqrt{\pi}}$;
156. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{3x-5}}{\sin \pi x}$;
157. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2+3x} - 2}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}}$;
158. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x + \sin 6x + \sin 7x}{\sin 9x - \sin 4x}$;
159. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sin \frac{\pi x}{3}}{\log_3(2x-17)}$.

ОТВЕТЫ

1. -1 . 2. 10 . 3. $\frac{2}{3}$. 4. 1 . 5. $\frac{1}{5}$. 6. $\frac{1}{2}$. 7. 1 . 8. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. 9. -8 .
 10. $\frac{1}{6}$. 11. -12 . 12. -1 . 13. $-\sqrt{2}$. 14. 3 . 15. $\frac{1}{2}$. 16. $-\frac{5}{2}$.
 17. 0 . 18. ∞ . 19. $\frac{1}{3}$. 20. $\frac{1}{9}$. 21. 1 . 22. 3 . 23. 1 . 24. -1 .
 25. 3 . 26. 0 . 27. $-\frac{1}{3}$. 28. $\sqrt{2}$. 29. -2 . 30. 1 . 31. $-\frac{1}{2}$. 32. 2 .
 33. 3 . 34. $-\frac{3}{2}$. 35. $-\frac{1}{2}$. 36. 0 . 37. $\frac{1}{2}$. 38. $\frac{15}{2}$. 39. $\frac{1}{2}$. 40. 0 .
 41. ∞ . 42. $-\frac{1}{12}$. 43. $\frac{2}{9}$. 44. 4 . 45. $\frac{4}{5}$. 46. $-\frac{10}{9}$. 47. 0 . 48. 4 .
 49. 2 . 50. 14 . 51. $\frac{1}{2}$. 52. $\frac{1}{2}$. 53. $-\frac{1}{2}$. 54. $\frac{1}{6}$. 55. $-2 \sin a$. 56. 1 .
 57. $\cos b$. 58. 1 . 59. x . 60. $\frac{n^2-m^2}{2}$. 61. $-\frac{1}{3}$. 62. $\frac{5}{8}$. 63. $\frac{8}{7}$.
 64. -6 . 65. $\frac{5}{12}$. 66. $-\frac{2 \ln 2}{5}$. 67. $\frac{8}{15}$. 68. $\frac{5}{3}$. 69. $\frac{1}{6}$. 70. $\frac{3}{5}$.
 71. $-\frac{1}{54}$. 72. $\frac{1}{e}$. 73. $\frac{1}{10 \ln 10}$. 74. -1 . 75. $\frac{a^2}{b^2}$. 76. $-\frac{\pi^2}{2}$. 77. $\frac{1}{2 \ln 2}$.
 78. 1 . 79. $64 \ln 4$. 80. $\ln \frac{3}{2}$. 81. 1 . 82. 2 . 83. -2 . 84. 2 .
 85. $2 \frac{\ln 7}{\ln 10}$. 86. $\frac{3}{5}$. 87. $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. 88. 0 . 89. $4 \ln 3$. 90. $\frac{\ln 4}{\ln 3}$. 91. $5^5 \ln 5$.
 92. $\frac{1}{5}$. 93. $-\frac{1}{2}$. 94. $\frac{1}{3 \ln 2}$. 95. $\frac{1}{2e}$. 96. $\frac{1}{3 \ln 3}$. 97. e^2 . 98. e .
 99. e^{-2} . 100. e^4 . 101. 1 . 102. $e^{-\frac{a^2}{2}}$. 103. $\frac{1}{e}$. 104. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 105. $\frac{1}{\sqrt{e}}$.
 106. $e^{\operatorname{ctg} 2}$. 107. 4 . 108. -2 . 109. e^4 . 110. e^{-2} . 111. $e^{\sqrt[3]{2}}$.
 112. $\frac{1}{e}$. 113. e^{-6} . 114. $e^{\frac{2}{\pi}}$. 115. $+\infty$. 116. $e^{-\frac{1}{\pi}}$. 117. e^{-2} .
 118. $-\frac{49}{2}$. 119. 3 . 120. $\frac{1}{2}$. 121. -3 . 122. 3 . 123. -1 . 124. $\frac{3}{2}$.
 125. $-\frac{1}{5}$. 126. $\frac{3}{4}$. 127. $-\frac{8}{9}$. 128. $\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}$. 129. $-\frac{2}{\ln 2}$. 130. $\frac{1}{2}$.
 131. $e^{-\frac{49}{2}}$. 132. 1 . 133. -1 . 134. $\frac{a}{b} 2^{a-b}$. 135. \sqrt{e} . 136. $\frac{8}{7}$.
 137. 12 . 138. $\ln 2$. 139. -5 . 140. -1 . 141. $-12 \ln 3$. 142. $-\frac{9 \ln 3}{8}$.
 143. $-\frac{5}{4 \ln 2}$. 144. $-160 \ln 2$. 145. -1 . 146. $-0, 1$. 147. $\frac{1}{108}$. 148. $\frac{1}{3}$.
 149. $-\frac{9}{\ln 3}$. 150. $2\sqrt{5} \cos 5$. 151. $\frac{\pi}{7}$. 152. $\frac{1}{7}$. 153. $\frac{1}{6\pi}$. 154. $-\frac{8 \ln 2}{\pi}$.
 155. $-2\sqrt{\frac{\pi}{3}}$. 156. $-\frac{2}{3\pi}$. 157. $-\frac{1}{\pi}$. 158. $\frac{6}{13}$. 159. $-\frac{\pi \ln 3}{6}$.