

Дифференциальное исчисление

§1. Производная функции

1.1. Определение производной

Рассмотрим функцию $y(x)$, определённую на некотором интервале $(a; b)$.

Разность $\Delta x = x - x_0$ ($x, x_0 \in (a; b)$) называется приращением аргумента x в точке x_0 . Разность $\Delta y(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$ называется приращением функции y в точке x_0 .

Если существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{x - x_0},$$

то он называется производной (конечной или бесконечной) функции y в точке x_0 и обозначается $y'(x_0)$.

Для производной функции $y = f(x)$ используются следующие обозначения:

$$y', \quad y'(x), \quad f', \quad f'(x), \quad y'_x, \quad f'_x, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy(x)}{dx}, \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

Замечание. Приращение $\Delta y(x_0)$ функции $y(x)$ в точке x_0 часто обозначают через Δy . Однако, не следует забывать, что эта величина зависит от точки x_0 и от приращения Δx .

Геометрический смысл производной заключается в том, что производная функции $y = f(x)$ в некоторой точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 : $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, где α — угол между касательной и положительным направлением оси абсцисс.

Механический смысл производной — это скорость (v) изменения пути (s) по времени (t): $v = s'(t)$.

Пример 1. Найти по определению производную функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \neq 0$. Так как $y(x) = \frac{1}{x}$,

то $y(x_0) = \frac{1}{x_0}$ и $y(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$, поэтому

$$\begin{aligned}\Delta y(x_0) &= y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \\ &= \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}.\end{aligned}$$

Отсюда,

$$\frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x} = -\frac{1}{x_0(x_0 + \Delta x)}.$$

Следовательно,

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x_0(x_0 + \Delta x)} \right) = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x_0^2 + x_0 \Delta x} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Так как в качестве x_0 можно взять любое число неравное нулю, то для любого числа $x \neq 0$ получаем

$$y'(x) = \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Например, $y'(-2) = -\frac{1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4}$.

Пример 2. Найти по определению производную функции $y = \sin x$.

РЕШЕНИЕ. Зафиксируем произвольную точку x_0 . Так как $y(x) = \sin x$, то $y(x_0) = \sin x_0$ и $y(x_0 + \Delta x) = \sin(x_0 + \Delta x)$, поэтому

$$\Delta y(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} &= \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right).\end{aligned}$$

Воспользовавшись непрерывностью функции $\sin x$ и первым замечательным пределом

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1,$$

получаем

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0.$$

Так как в качестве x_0 можно взять любое число, то для любого числа x выводим

$$y'(x) = (\sin x)' = \cos x.$$

Например, $y'(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

1.2. Производные основных элементарных функций

Приведём производные основных элементарных функций.

$$(c)' = 0 \quad (c \text{ — число});$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1};$$

$$(e^x)' = e^x;$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0);$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad \text{где } \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad \text{где } \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad \text{где } \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x};$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0, \quad \text{где } \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

Пример 3. Найти производные следующих выражений: 5 , $\ln \operatorname{tg} \frac{3}{7}$, 6^x , $\log_3 x$.

РЕШЕНИЕ. Производная числа равна нулю, поэтому $5' = 0$, $(\ln \operatorname{tg} \frac{3}{7})' = 0$, так как 5 и $\ln \operatorname{tg} \frac{3}{7}$ — числа.

Для нахождения производных функций 6^x и $\log_3 x$ воспользуемся табличными формулами для производных показательной (при $a = 6$) и логарифмической (при $a = 3$) функций, имеем: $(6^x)' = 6^x \ln 6$, $(\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}$.

Пример 4. Вычислить производные следующих функций: x^{17} , $x^{\pi-e}$, $\frac{1}{x}$, \sqrt{x} , $\sqrt[3]{x^2}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}$.

РЕШЕНИЕ. Каждая из данных функций является степенной функцией, поэтому все производные находятся по формуле $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Имеем:

$$(x^{17})' = 17x^{17-1} = 17x^{16};$$

$$(x^{\pi-e})' = (\pi - e)x^{\pi-e-1};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}};$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}\right)' = \left(\frac{1}{x^{\frac{7}{5}}}\right)' = \left(x^{-\frac{7}{5}}\right)' = -\frac{7}{5}x^{-\frac{7}{5}-1} = -\frac{7}{5}x^{-\frac{12}{5}} = -\frac{7}{5} \cdot \frac{1}{x^{\frac{12}{5}}} = -\frac{7}{5\sqrt[5]{x^{12}}}.$$

1.3. Производная суммы, разности, произведения и частного

Производные суммы, разности, произведения и частного двух функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ находятся по следующим формулам:

$$(u + v)' = u' + v', \quad (u - v)' = u' - v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad (cu)' = cu', \quad c \text{ — число,}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

Пример 5. Найти производную функции $\frac{1}{x^3} - 5 \ln x$.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x^3} - 5 \ln x\right)' &= \left(\frac{1}{x^3}\right)' - (5 \ln x)' = (x^{-3})' - 5(\ln x)' = \\ &= -3x^{-4} - 5\frac{1}{x} = -\frac{3}{x^4} - \frac{5}{x} = -\frac{3 + 5x^3}{x^4}. \end{aligned}$$

Пример 6. Найти производную функции $\frac{2 \operatorname{ch} x}{3} + \frac{\operatorname{cth} x}{4}$.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2 \operatorname{ch} x}{3} + \frac{\operatorname{cth} x}{4}\right)' &= \left(\frac{2 \operatorname{ch} x}{3}\right)' + \left(\frac{\operatorname{cth} x}{4}\right)' = \frac{2}{3}(\operatorname{ch} x)' + \frac{1}{4}(\operatorname{cth} x)' = \\ &= \frac{2}{3} \operatorname{sh} x + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\right) = \frac{2 \operatorname{sh} x}{3} - \frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 x}. \end{aligned}$$

Пример 7. $f(x) = 5x^3 - 3x^2 - 2x + 7$, найти $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-1)$.

РЕШЕНИЕ. Сначала найдём производную функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5x^3 - 3x^2 - 2x + 7)' = (5x^3)' - (3x^2)' - (2x)' + 7' = \\ &= 5(x^3)' - 3(x^2)' - 2x' + 0 = 5 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x - 2 \cdot 1 = 15x^2 - 6x - 2. \end{aligned}$$

Итак, $f'(x) = 15x^2 - 6x - 2$. Теперь находим значения производных при конкретных значениях x :

$$\begin{aligned} f'(0) &= 15 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 - 2 = 0 - 0 - 2 = -2, \\ f'(2) &= 15 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 2 = 60 - 12 - 2 = 46, \\ f'(-1) &= 15 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) - 2 = 15 + 6 - 2 = 19. \end{aligned}$$

Пример 8. Найти производную функции $f(x) = (x^2 + x) \cos x$.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x^2 + x) \cos x)' = (x^2 + x)' \cos x + (x^2 + x)(\cos x)' = \\ &= (2x + 1) \cos x + (x^2 + x)(-\sin x). \end{aligned}$$

Пример 9. Найти производную функции $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 1}{x^2 + 2^x}$.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 1}{x^2 + 2^x} \right)' = \\ &= \frac{(x^3 + 2x^2 + 5x + 1)'(x^2 + 2^x) - (x^3 + 2x^2 + 5x + 1)(x^2 + 2^x)'}{(x^2 + 2^x)^2} = \\ &= \frac{(3x^2 + 4x + 5)(x^2 + 2^x) - (x^3 + 2x^2 + 5x + 1)(2x + 2^x \ln 2)}{(x^2 + 2^x)^2}. \end{aligned}$$

Пример 10. Найти производную функции $f(x) = \arccos x \ln x \operatorname{sh} x$.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\arccos x \ln x \operatorname{sh} x)' = ((\arccos x \ln x) \operatorname{sh} x)' = \\ &= (\arccos x \ln x)' \operatorname{sh} x + (\arccos x \ln x)(\operatorname{sh} x)' = \\ &= ((\arccos x)' \ln x + \arccos x (\ln x)') \operatorname{sh} x + (\arccos x \ln x) \operatorname{ch} x = \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln x + \arccos x \frac{1}{x} \right) \operatorname{sh} x + \arccos x \ln x \operatorname{ch} x = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln x \operatorname{sh} x + \arccos x \frac{1}{x} \operatorname{sh} x + \arccos x \ln x \operatorname{ch} x = \\ &= \frac{\arccos x \operatorname{sh} x}{x} - \frac{\ln x \operatorname{sh} x}{\sqrt{1-x^2}} + \arccos x \ln x \operatorname{ch} x. \end{aligned}$$

Пример 11. Найти производную функции $f(x) = \frac{x^{13} \operatorname{arctg} x}{\lg x}$.

РЕШЕНИЕ. Функция $\lg x$ — это десятичный логарифм, то есть $\lg x = \log_{10} x$. Применим формулы производных частного и произведения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^{13} \operatorname{arctg} x}{\lg x} \right)' &= \frac{(x^{13} \operatorname{arctg} x)' \cdot \lg x - (x^{13} \operatorname{arctg} x) \cdot (\lg x)'}{(\lg x)^2} = \\ &= \frac{\left((x^{13})' \operatorname{arctg} x + x^{13} (\operatorname{arctg} x)' \right) \cdot \lg x - (x^{13} \operatorname{arctg} x) \cdot \frac{1}{x \ln 10}}{\lg^2 x} = \\ &= \frac{\left(13x^{12} \operatorname{arctg} x + x^{13} \left(-\frac{1}{1+x^2} \right) \right) \cdot \lg x - x^{13} \operatorname{arctg} x \frac{1}{x \ln 10}}{\lg^2 x} = \\ &= \frac{13x^{12} \operatorname{arctg} x \lg x - \frac{x^{13} \lg x}{1+x^2} - \frac{x^{12} \operatorname{arctg} x}{\ln 10}}{\lg^2 x}. \end{aligned}$$

1.4. Производная сложной функции

Пусть функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в некоторой точке $x = x_0$, а функция $y = f(u)$ имеет производную в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда, сложная функция $f(\varphi(x))$ имеет производную в точке $x = x_0$, которая вычисляется по формуле

$$[f(\varphi(x_0))]' = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0).$$

Для краткости используется следующая запись последней формулы:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Пример 12. Найти производную функции $\ln \sin x$.

РЕШЕНИЕ. Обозначим $y = \ln u$, $u = \sin x$, тогда $y = \ln \sin x$. По теореме о производной сложной функции $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. Находим:

$$y'_u = (\ln u)'_u = \frac{1}{u}, \quad u'_x = (\sin x)'_x = \cos x,$$

откуда

$$(\ln \sin x)' = y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{u} \cdot \cos x = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x.$$

Пример 13. Найти производную функции $y(x) = e^{x^2}$.

РЕШЕНИЕ. Обозначим $u = x^2$, тогда $y(u) = e^u$. По теореме о производной сложной функции $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. Находим:

$$y'_u = (e^u)'_u = e^u, \quad u'_x = (x^2)'_x = 2x,$$

откуда

$$y'_x = \left(e^{x^2} \right)' = y'_u \cdot u'_x = e^u \cdot 2x = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}.$$

Часто более удобно непосредственно находить производные промежуточных функций.

Пример 14. Найти производную функции $\ln \sin x$ (см. пример 12).

РЕШЕНИЕ.

$$(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} (\sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cos x = \operatorname{ctg} x.$$

Пример 15. Найти производную функции $y(x) = e^{x^2}$ (см. пример 13).

РЕШЕНИЕ.

$$y'(x) = \left(e^{x^2} \right)' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}.$$

Пример 16. Найти производную функции e^{-x} .

РЕШЕНИЕ.

$$\left(e^{-x} \right)' = e^{-x} \cdot (-x)' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}.$$

Пример 17. Найти производную функции $(\operatorname{tg} \sqrt{x})^3$.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} ((\operatorname{tg} \sqrt{x})^3)' &= 3(\operatorname{tg} \sqrt{x})^2 (\operatorname{tg} \sqrt{x})' = 3(\operatorname{tg} \sqrt{x})^2 \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} (\sqrt{x})' = \\ &= 3(\operatorname{tg} \sqrt{x})^2 \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3 \operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Пример 18. Найти производную функции $\cos \log_6 5x - \log_6 \cos 5$.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} (\cos \log_6 5x - \log_6 \cos 5)' &= (\cos \log_6 5x)' - (\log_6 \cos 5)' = (\cos \log_6 5x)' = \\ &= -\sin \log_6 5x \cdot (\log_6 5x)' = -\sin \log_6 5x \cdot \frac{1}{(5x) \ln 6} \cdot (5x)' = \\ &= -\sin \log_6 5x \cdot \frac{1}{5x \ln 6} \cdot 5 = -\frac{\sin \log_6 5x}{x \ln 6}. \end{aligned}$$

Замечание. Выражение $\log_6 \cos 5$ из примера 18 является числом, поэтому $(\log_6 \cos 5)' = 0$.

Пример 19. Найти производную функции $\operatorname{arctg}^2 e^{-x}$.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} (\operatorname{arctg}^2 e^{-x})' &= \left((\operatorname{arctg} e^{-x})^2 \right)' = 2 \operatorname{arctg} e^{-x} \cdot (\operatorname{arctg} e^{-x})' = \\ &= 2 \operatorname{arctg} e^{-x} \cdot \frac{1}{1 + (e^{-x})^2} \cdot (e^{-x})' = 2 \operatorname{arctg} e^{-x} \cdot \frac{1}{1 + e^{-2x}} \cdot e^{-x} \cdot (-x)' = \\ &= 2 \operatorname{arctg} e^{-x} \cdot \frac{1}{1 + e^{-2x}} \cdot e^{-x} \cdot (-1) = -\frac{2e^{-x} \operatorname{arctg} e^{-x}}{1 + e^{-2x}}. \end{aligned}$$

Пример 20. Найти производную функции $2 \ln^3 \sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}$.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} (2 \ln^3 \sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x})' &= 2 (\ln^3 \sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x})' = 2 \left((\ln \sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x})^3 \right)' = \\ &= 2 \cdot \left(3 (\ln \sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x})^2 \right) \cdot (\ln \sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x})' = 6 \ln^2 \sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x} \cdot (\ln \sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x})' = \\ &= 6 \ln^2 \sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}} \cdot (\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x})' = \frac{6 \ln^2 \sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}{\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}} \cdot ((\operatorname{tg} 5x)^{\frac{1}{4}})' = \\ &= \frac{6 \ln^2 \sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}{\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}} \cdot \frac{1}{4} \cdot (\operatorname{tg} 5x)^{-\frac{3}{4}} \cdot (\operatorname{tg} 5x)' = \frac{6 \ln^2 \sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}{4 (\operatorname{tg} 5x)^{\frac{1}{4}} (\operatorname{tg} 5x)^{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot (5x)' = \\ &= \frac{3 \ln^2 \sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}{4 \operatorname{tg} 5x \cos^2 5x} \cdot 5 = \frac{15 \ln^2 \sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}{4 \sin 5x \cos 5x} = \frac{15 \ln^2 \sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}{2 \sin 10x}. \end{aligned}$$

Замечание. В некоторых случаях удобнее упростить функцию до взятия производной. Если в примере 20 сначала преобразовать функцию следующим образом, то вычисления будут проще:

$$\begin{aligned} 2 \ln^3 \sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x} &= 2 (\ln \sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x})^3 = 2 (\ln (\operatorname{tg} 5x)^{\frac{1}{4}})^3 = \\ &= 2 \left(\frac{1}{4} \ln \operatorname{tg} 5x \right)^3 = \frac{1}{32} (\ln \operatorname{tg} 5x)^3. \end{aligned}$$

Пример 21. Вычислить производную функции $y(x) = \frac{\sin 14x}{2 \cos 7x}$.

РЕШЕНИЕ. Сначала преобразуем функцию $y(x)$:

$$y(x) = \frac{\sin 14x}{2 \cos 7x} = \frac{2 \sin 7x \cos 7x}{2 \cos 7x} = \sin 7x.$$

Теперь находим производную функции $y(x)$:

$$y'(x) = (\sin 7x)' = \cos 7x \cdot (7x)' = 7 \cos 7x.$$

1.5. Производная степенно-показательной функции

Для вычисления производной функции вида $u(x)^{v(x)}$ предварительно надо представить данную функцию в виде

$$u(x)^{v(x)} = e^{\ln u(x)^{v(x)}} = e^{v(x) \ln u(x)}.$$

Пример 22. Найти производную функции $y(x) = x^x$.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} y'(x) &= (x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = \\ &= x^x (x \ln x)' = x^x [(x' \ln x + x(\ln x)')] = x^x \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (\ln x + 1). \end{aligned}$$

Замечание. Функция x^x из примера 22 не является ни функцией вида x^α , ни функцией вида a^x , поэтому будет ошибкой вычислять производную данной функции одним из следующих способов:

$$(x^x)' = x \cdot x^{x-1}, \quad (x^x)' = x^x \ln x.$$

Пример 23. Найти производную функции $y(x) = (\sin x)^{\ln x}$.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} y'(x) &= ((\sin x)^{\ln x})' = (e^{\ln(\sin x)^{\ln x}})' = (e^{\ln x \ln \sin x})' = \\ &= e^{\ln x \ln \sin x} (\ln x \ln \sin x)' = (\sin x)^{\ln x} [(\ln x)' \ln \sin x + \ln x (\ln \sin x)'] = \\ &= (\sin x)^{\ln x} \left[\frac{1}{x} \ln \sin x + \ln x \frac{1}{\sin x} (\sin x)' \right] = \\ &= (\sin x)^{\ln x} \left(\frac{\ln \sin x}{x} + \frac{\ln x \cos x}{\sin x} \right). \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти по определению производную функции:

1. $y = x^2$;
2. $y = x^3$;
3. $y = x^4$;
4. $y = \sqrt{x}$;
5. $y = \frac{1}{x^2}$;
6. $y = \frac{1}{x^3}$;
7. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$;
8. $y = \sin 2x$;
9. $y = \cos \frac{x}{2}$;

10. $y = \operatorname{tg} x;$

11. $y = \frac{1}{2x+2};$

12. $y = \sqrt{1+3x};$

13. $y = \sqrt{1+x^2}.$

Найти производную функции:

14. $y = x^4 + 3x^2 - 2x + 1;$

15. $y = 7x^7 + 3x^2 - 4x - 1;$

16. $y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + 4;$

17. $y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^3} + 2;$

18. $y = 4x^5 - 3 \sin x + 5 \operatorname{ctg} x;$

19. $y = 3\sqrt{x} + 4 \cos x - 2 \operatorname{tg} x + 3;$

20. $y = 3 + 4x^2 = \sqrt[5]{x^3} + \frac{1}{x^2} + \sin x + \cos x + \ln x;$

21. $y = \sqrt[8]{x^3} - 4x^6 + 5 \ln x - 7 \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x;$

22. $y = \log_2 x + 3 \log_3 x;$

23. $y = 4e^x + \operatorname{arctg} x + \arcsin x;$

24. $y = e^x - \frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{x^4}{4};$

25. $y = 5^x + 6^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x;$

26. $y = \arcsin x + 3\sqrt[3]{x} + 5 \arccos x;$

27. $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}};$

28. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x;$

29. $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} x;$

30. $y = x \sin x;$

31. $y = x^2 \operatorname{tg} x;$

32. $y = \sqrt[7]{x} \ln x;$

33. $y = x \arccos x;$

34. $y = \sqrt[3]{x} \operatorname{arcctg} x;$

35. $y = x^2 \log_3 x;$

36. $y = \frac{x^2-1}{x^2+1};$

37. $y = \frac{\ln x}{\sin x} + x \operatorname{ctg} x;$

38. $y = \frac{\cos x}{1+2 \sin x};$

39. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}};$

40. $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{x}};$

41. $y = \frac{x \operatorname{tg} x}{1+x^2};$

42. $y = \frac{1+e^x}{1-e^x};$

43. $f(x) = \frac{x^2}{3} - x^2 + x$, найти $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(-1)$;

44. $f(x) = x^2 - \frac{1}{2x^2}$, найти $f'(2)$, $f'(-2)$;

45. $f(x) = \frac{x}{2x-1}$, найти $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-2)$;

46. $f(x) = \frac{1-10^x}{1+10^x}$, найти $f'(0)$;
47. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, найти $f'(e)$, $f'(\frac{1}{e})$, $f'(e^2)$;
48. $f(x) = x \ln x$, найти $f'(1)$, $f'(e)$, $f'(\frac{1}{e})$, $f'(\frac{1}{e^2})$;
49. $y = \sin 3x$;
50. $y = \sin(x^2 + 5x + 2)$;
51. $y = \sqrt{1-x^2}$;
52. $y = \sqrt{1+5\cos x}$;
53. $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$;
54. $y = \sin^2 x$;
55. $y = \sin^3 x$;
56. $y = \cos^{100} x$;
57. $y = \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3})$;
58. $y = \operatorname{tg}(x^2 + 3)$;
59. $y = \ln \cos x$;
60. $y = \ln \operatorname{tg} 5x$;
61. $y = \ln(1 + \cos x)$;
62. $y = e^{\operatorname{tg} x}$;
63. $y = \ln(x^2 - 3x + 7)$;
64. $y = \ln(x^2 + 2x)$;
65. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 5})$;
66. $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}}$;
67. $y = \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} \frac{x^2}{\sqrt{3}}$;
68. $y = \frac{1}{6} \ln \frac{x-3}{x+3}$;
69. $y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}$;
70. $y = \ln \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$;
71. $y = \frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsin} x)$;
72. $y = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$;
73. $y = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$;
74. $y = x \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - \frac{\sqrt{2x-1}}{2}$;
75. $y = \operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x + 3x$;
76. $y = \sin^2 x^3$;
77. $y = \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{3}$;
78. $y = \frac{1}{(1+\cos 4x)^5}$;
79. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;
80. $y = \frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$;
81. $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;
82. $y = 2^{3x} + x^5 + e^{-x^2} + \frac{1}{x}$;

83. $y = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$;
84. $y = x^2e^{-x}$;
85. $y = (x + 2)e^{-x^2}$;
86. $y = e^{\frac{x}{3}} \cos \frac{x}{3}$;
87. $y = e^{\frac{1}{\cos x}}$;
88. $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$;
89. $y = 10^{3 - \sin^3 2x}$;
90. $y = \sin 2^x$;
91. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$;
92. $y = \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1})$;
93. $y = \ln \sqrt{\frac{e^{4x}}{e^{4x} + 1}}$;
94. $y = \frac{\ln \sin x}{\ln \cos x}$;
95. $y = \log_5 \cos 7x$;
96. $y = \log_7 \cos \sqrt{1 + x}$;
97. $y = e^{\sqrt[7]{x^2}}$;
98. $y = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{x - 1})$;
99. $y = \ln \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$;
100. $y = \ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})$;
101. $y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$;
102. $y = \arccos(1 - 2x)$;
103. $y = \arcsin \sqrt{1 - 4x}$;
104. $y = \arcsin \sqrt{\sin x}$;
105. $y = \arcsin e^{4x}$;
106. $y = \arcsin \sqrt{x}$;
107. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{6x - 1}$;
108. $y = \operatorname{arctg} e^{2x} + \ln \sqrt{\frac{1 + e^{2x}}{e^{2x} - 1}}$;
109. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$;
110. $y = \ln \arccos 2x$;
111. $y = \operatorname{arctg} \ln(5x + 3)$;
112. $y = \operatorname{arctg} \frac{x+3}{x-3}$;
113. $y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x}$;
114. $y = \arccos e^{-\frac{x^2}{2}}$;
115. $y = \operatorname{tg} \sin \cos x$;
116. $y = e^{x^2 \operatorname{ctg} 3x}$;
117. $y = \ln \sin \operatorname{tg} e^{-\frac{x}{2}}$;
118. $y = \ln^5 \sin x$;

119. $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}$;
120. $y = \sqrt[5]{\ln \sin \frac{x+3}{4}}$;
121. $y = e^{\sqrt{1+\ln x}}$;
122. $y = \sqrt[5]{\operatorname{arctg} e^{5x}}$;
123. $y = \sqrt{1 - \arccos^2 x}$;
124. $y = \operatorname{arctg} (x - \sqrt{1+x^2})$;
125. $y = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$;
126. $y = \sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \ln \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right)$;
127. $y = 2 \ln(x^2 + 5) - \sqrt{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}}$;
128. $y = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$;
129. $y = \frac{2}{3} \sqrt{(1+\ln x)^3}$;
130. $y = \ln (x \sin x \cdot \sqrt{1-x^2})$;
131. $y = x^{\frac{1}{x}}$;
132. $y = x^{\sin x}$;
133. $y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$;
134. $y = (\cos x)^{\sin x}$.

§2. Дифференциал функции

2.1. Понятие дифференциала

Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0 , если её приращение Δy в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x,$$

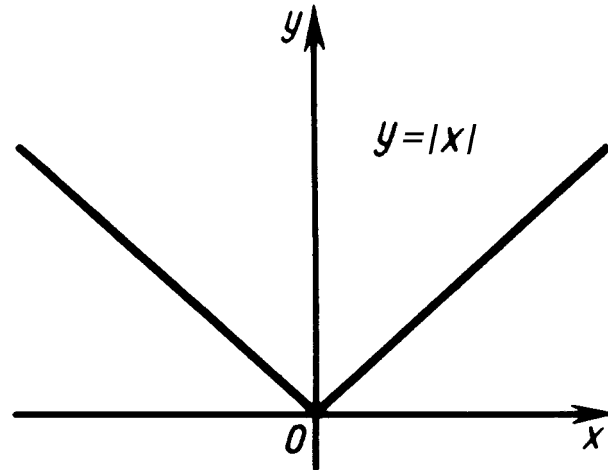
где A — некоторое число, независящее от Δx , а $\alpha(\Delta x)$ — функция аргумента Δx , являющаяся бесконечно малой при $\Delta x \rightarrow 0$, то есть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Существуют зависимости между понятиями дифференцируемости функции в точке, существованием производной и непрерывностью функции в той же точке.

Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке x_0 , то она и непрерывна в этой точке.

Замечание. Обратное утверждение неверно. Функция может быть непрерывной в точке, но не быть дифференцируемой, то есть не иметь производной в этой точке. Примером такой функции является функция $y = |x|$, которая непрерывна в точке $x = 0$, но не имеет в этой точке производной, то есть не является дифференцируемой.



Если функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка (дифференцируема в каждой точке этого промежутка), то будем говорить, что функция $y = f(x)$ дифференцируема на указанном промежутке.

Дифференциалом dx независимой переменной x назовём приращение Δx этой переменной: $dx = \Delta x$.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то есть её приращение Δy в этой точке можно записать в виде суммы двух слагаемых:

$$\Delta y = A \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x,$$

где A — число и $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Выражение $A \Delta x$ называется дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается dy :

$$dy = A \Delta x.$$

Учитывая зависимость между понятиями дифференцируемости и существования производной функции в точке, получаем, что $A = f'(x_0)$. Таким образом, дифференциал dy функции $y = f(x)$ в точке x_0 записывается в виде

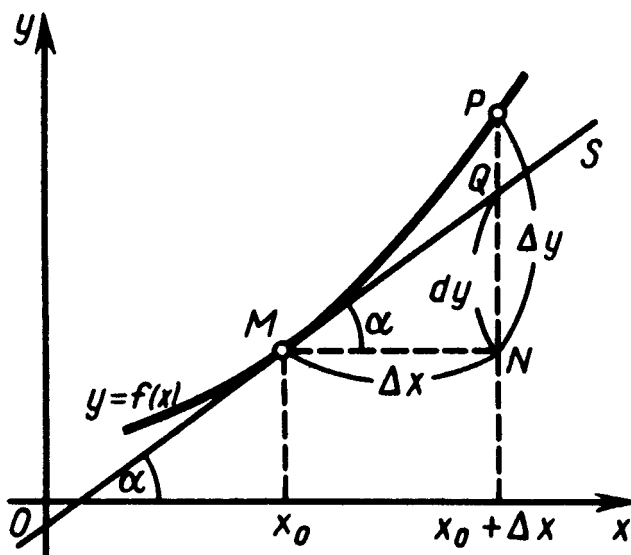
$$dy = d(f(x_0)) = f'(x_0)dx.$$

Заметим, что с помощью последней формулы производную $f'(x_0)$ можно вычислить как отношение дифференциала функции dy к дифференциалу независимой переменной, то есть

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

Дифференциал функции в точке x_0 имеет геометрический смысл. Пусть точка M на графике функции $y = f(x)$ соответствует значению аргумента x_0 , точка P — значению аргумента $x_0 + \Delta x$, прямая MS — касательная к графику $y = f(x)$ в точке M , α — угол между касательной и осью Ox . Пусть, $MN \parallel Ox$, $PN \parallel Oy$, Q — точка пересечения касательной MS с прямой PN . Тогда приращение функции Δy равно величине отрезка NP . В то же время из прямоугольного треугольника MNQ получаем: $NQ = \Delta x \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) \Delta x = dy$, то есть дифференциал функции dy равен величине отрезка NQ . Мы получили, что величины отрезков NP и NQ различны.

Таким образом, дифференциал dy функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению “ординаты касательной” MS к графику этой функции в точке $M(x_0; f(x_0))$, а приращение функции Δy есть приращение “ординаты самой функции” $y = f(x)$ в точке x_0 , соответствующее приращению аргумента, равному Δx .



2.2. Вычисление дифференциала

Правила дифференцирования функций аналогичны правилам нахождения производных. Для функций u , v и f справедливы свойства:

$$d(u + v) = du + dv;$$

$$d(u - v) = du - dv;$$

$$d(uv) = u dv + v du;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}, \quad v \neq 0;$$

$$d(f(x)) = f'(x) dx, \quad \text{в частности, если } c \text{ — число, то}$$

$$d(cx) = c dx,$$

$$d(x + c) = dx.$$

Пример 1. Найти дифференциал функции $y(x) = x^2$.

РЕШЕНИЕ. Дифференциал dy функции $y(x)$ находится по формуле $dy = y'(x)dx$, поэтому

$$dy = dx^2 = (x^2)'dx = 2x dx.$$

Пример 2. Найти дифференциал функции $y(x) = 5 \cos 3x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

РЕШЕНИЕ. По правилу нахождения дифференциала функции в точке, имеем

$$dy = y' \left(\frac{\pi}{2} \right) dx.$$

Находим,

$$y'(x) = (5 \cos 3x)' = -15 \sin 3x \quad \Rightarrow \quad y' \left(\frac{\pi}{2} \right) = -15 \sin \frac{3\pi}{2} = 15.$$

Следовательно, дифференциал dy в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$ равен $15 dx$:

$$dy = 15 dx.$$

Пример 3. Найти дифференциал функции $y = \sin^2 x^3$.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} dy = y' dx &= (\sin^2 x^3)' dx = 2 \sin x^3 (\sin x^3)' dx = \\ &= 2 \sin x^3 \cos x^3 (x^3)' dx = 2 \sin x^3 \cos x^3 \cdot 3x^2 dx = 3x^2 \sin 2x^3 dx. \end{aligned}$$

Пример 4. Найти дифференциал функции xe^{x^2} .

РЕШЕНИЕ.

1-й способ. Воспользуемся формулой $df(x) = f'(x)dx$.

$$\begin{aligned} d(xe^{x^2}) &= (xe^{x^2})' dx = \left(x'e^{x^2} + x(e^{x^2})' \right) dx = \\ &= \left(e^{x^2} + x \cdot e^{x^2} 2x \right) dx = e^{x^2} (2x^2 + 1) dx. \end{aligned}$$

2-й способ. Применим формулу $d(uv) = u dv + v du$, имеем

$$d(xe^{x^2}) = e^{x^2} dx + x d(e^{x^2}).$$

По формуле $df(u) = f'(u)du$ получаем

$$d(e^{x^2}) = e^{x^2} d(x^2) = e^{x^2} 2x dx.$$

Таким образом,

$$d(xe^{x^2}) = e^{x^2} dx + x(2xe^{x^2} dx) = e^{x^2} (2x^2 + 1) dx.$$

2.3. Инвариантность формы первого дифференциала

Главным свойством дифференциала является инвариантность (неизменность) его формы относительно замены переменных. Если $y = y(x)$, $x = x(t)$, то

$$dy = y'_t dt = y'_x dx.$$

Это свойство называется свойством инвариантности формы первого дифференциала относительно замены аргумента.

Задачи для самостоятельного решения

Найти дифференциал функции:

135. $y = x^5$;

136. $y = \operatorname{tg} x$;

137. $y = \sin^3 2x$;

138. $y = \ln x$;

139. $y = \ln(\sin \sqrt{x})$;

140. $y = e^{-\frac{1}{\cos x}}$;

141. $y = 2^{-x^2}$.

Найти дифференциал функции в точке x_0 :

142. $y = x^{-4}$, $x_0 = -1$;

143. $y = x^3 - 3x^2 + 3x$, $x_0 = 0$;

144. $y = \sqrt{1 + x^2}$, $x_0 = -3$;

145. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 2$;

146. $y = \ln \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

147. $y = e^{-2x}$, $x_0 = -\frac{1}{2}$;

148. $y = \sqrt{x} + 1$, $x_0 = 4$;

149. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{4x - 1}$, $x_0 = 3$.

§3. Производные и дифференциалы высших порядков

3.1. Понятие производной n -го порядка

Производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ сама является функцией аргумента x . Следовательно, по отношению к ней снова можно ставить вопрос о существовании и нахождении производной.

Назовём $f'(x)$ производной первого порядка функции $f(x)$.

Производная от производной некоторой функции называется производной второго порядка (или второй производной) этой функции. Производная от

второй производной называется производной третьего порядка (или третьей производной) и так далее. Производные, начиная со второй, называются производными высших порядков и обозначаются

$$y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \dots, y^{(n)}, \dots$$

(вместо y'' и y''' иногда пишут $y^{(2)}$ и $y^{(3)}$) или

$$f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots$$

Производная n -го порядка функции является производной от производной $(n - 1)$ -го порядка, то есть

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)} \right)'$$

Производные высших порядков имеют широкое применение в физике. Если функция $y = f(x)$ описывает закон движения материальной точки по прямой линии, то первая производная $f'(x)$ есть мгновенная скорость точки в момент времени x , а вторая производная равна скорости изменения скорости, то есть ускорению движущейся точки в этот момент.

Пример 1. Найти производную второго порядка функции $y = \sin^2 x$.

РЕШЕНИЕ. Сначала найдём производную первого порядка.

$$y' = (\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

Теперь находим вторую производную.

$$y'' = (y')' = (\sin 2x)' = 2 \cos 2x.$$

Пример 2. Найти производную третьего порядка функции $y = x \sin x$.

РЕШЕНИЕ. Последовательно находим первую, вторую и третью производные данной функции:

$$y' = (x \sin x)' = \sin x + x \cos x;$$

$$y'' = (y')' = (\sin x + x \cos x)' = \cos x + \cos x - x \sin x = 2 \cos x - x \sin x;$$

$$\begin{aligned} y''' = (y'')' &= (2 \cos x - x \sin x)' = -2 \sin x - (\sin x + x \cos x) = \\ &= -3 \sin x - x \cos x. \end{aligned}$$

3.2. Формулы для n -х производных некоторых функций

Пример 3. Найти $y^{(n)}(x)$, если $y(x) = x^\alpha$, $x > 0$, α — любое действительное число.

РЕШЕНИЕ. Последовательно дифференцируя, имеем:

$$\begin{aligned} y' &= \alpha x^{\alpha-1}, \quad y^{(2)} = (y')' = (\alpha x^{\alpha-1})' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \\ y^{(3)} &= (y^{(2)})' = (\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2})' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}, \dots \\ &\dots, y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))x^{\alpha-n}. \end{aligned}$$

Введём понятия факториала и двойного факториала числа.

Факториал натурального числа n определяется формулой

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

читается “эн факториал”. Например, $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$. По определению полагают $0! = 1$. В вычислениях часто применяется следующая формула:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!.$$

Двойной факториал натурального числа n определяется равенством

$$n!! = n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \dots, \quad 0!! = 1,$$

читается “двойной факториал эн” или “эн двойной факториал”. Двойной факториал для чётных и нечётных чисел записывается так:

$$\begin{aligned} (2n)!! &= 2n \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2, \\ (2n+1)!! &= (2n+1) \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1. \end{aligned}$$

Например, $10!! = 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 3840$, $7!! = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 105$.

Пример 4. Найти n -ю производную функции $y = \frac{1}{x}$.

РЕШЕНИЕ. Воспользуемся формулой n -й производной степенной функции, найденной в примере 3. В нашем случае $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Следовательно, $\alpha = -1$. Получаем

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot \dots \cdot (-n) \cdot x^{-1-n} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}.$$

Пример 5. Найти производную n -го порядка от функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

РЕШЕНИЕ. Применим формулу n -й производной, найденную в примере 3. В данном случае $y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$. Таким образом, $\alpha = -\frac{1}{2}$. Имеем,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{(n)} &= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{2n-1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-n} = \\ &= \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2x)^n \cdot \sqrt{x}} = \frac{(-1)^n \cdot (2n-1)!!}{(2x)^n \cdot \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Пример 6. Найти производные всех порядков от функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

РЕШЕНИЕ. Найдём n -ю производную функции $y = \sin x$. Последовательно дифференцируя, имеем:

$$\begin{aligned} y' &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\ y^{(2)} &= (y')' = (\cos x)' = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \\ y^{(3)} &= (y^{(2)})' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \dots \\ &\dots, y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, производную любого порядка функции $\sin x$ можно вычислять по формуле

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Например, $(\sin x)^{(10)} = \sin\left(x + 10 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + 5\pi) = -\sin x$.

Аналогично можно получить формулу n -й производной функции $\cos x$:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

3.3. Формула Лейбница для n -й производной произведения двух функций

Для записи формулы Лейбница введём понятие числа сочетаний из n элементов по k элементам (каждое из чисел n и k предполагается натуральным числом или нулём, причём $0 \leq k \leq n$). Итак, для заданных чисел n и k определим число C_n^k по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!},$$

произносится “цэ из эн по ка”. Отметим, что число C_n^k обязательно натуральное при любых n и k .

Пример 7. Вычислить а) C_5^3 ; б) C_6^2 ; в) C_{10}^4 .

РЕШЕНИЕ.

$$\text{а) } C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10;$$

$$\text{б) } C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15;$$

$$\text{в) } C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{4! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

Пусть $y = u \cdot v$, где u и v — некоторые функции от переменной x , имеющие производные любого порядка. Тогда справедлива формула Лейбница:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (uv)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v'' + \dots \\ &\quad \dots + C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} + \dots + C_n^{n-1} u' v^{(n-1)} + C_n^n u v^{(n)} = \\ &= u^{(n)} v + n u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} v'' + \dots \\ &\quad \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} u^{(n-k)} v^{(k)} + \dots + n u' v^{(n-1)} + u v^{(n)}. \end{aligned}$$

Формулу Лейбница удобно применять в случае “простых” функций u и v .

В случаях $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$ формула Лейбница принимает вид:

$$\begin{aligned} y' &= (uv)' = u'v + uv'; & y'' &= (uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''; \\ y''' &= (uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''. \end{aligned}$$

Заметим, что первая из этих формул является формулой производной произведения двух функций.

Использование следующей формулы часто позволяет сократить вычисления коэффициентов.

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Пример 8. Вычислить пятую производную функции $y = x^5 e^x$.

РЕШЕНИЕ. Полагая $u = x^5$ и $v = e^x$, находим:

$$\begin{aligned} u' &= 5x^4, & u'' &= 20x^3, & u''' &= 60x^2, & u^{(4)} &= 120x, & u^{(5)} &= 120, \\ v' &= v'' = v''' = v^{(4)} = v^{(5)} = e^x. \end{aligned}$$

Теперь вычисляем коэффициенты при производных:

$$\begin{aligned} C_5^0 &= \frac{5!}{0! \cdot (5-0)!} = 1, & C_5^1 &= \frac{5!}{1! \cdot (5-1)!} = 5, & C_5^2 &= \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = 10, \\ C_5^3 &= C_5^{5-2} = C_5^2 = 10, & C_5^4 &= C_5^{5-1} = C_5^1 = 5, & C_5^5 &= C_5^{5-0} = C_5^0 = 1. \end{aligned}$$

Подставляя найденные производные и числа в формулу Лейбница при $n = 5$, получаем

$$\begin{aligned} y^{(5)} &= (uv)^{(5)} = \\ &= C_5^0 u^{(5)} v + C_5^1 u^{(5-1)} v' + C_5^2 u^{(5-2)} v'' + C_5^3 u^{(5-3)} v''' + C_5^4 u' v^{(5-1)} + C_5^5 uv^{(5)} = \\ &= 1 \cdot 120 \cdot e^x + 5 \cdot 120x \cdot e^x + 10 \cdot 60x^2 \cdot e^x + 10 \cdot 20x^3 \cdot e^x + 5 \cdot 5x^4 \cdot e^x + 1 \cdot x^5 \cdot e^x = \\ &= (120 + 600x + 600x^2 + 200x^3 + 25x^4 + x^5)e^x. \end{aligned}$$

Пример 9. Вычислить 55-ю производную функции $y = (x^2 - 17) \cos 3x$.

РЕШЕНИЕ. Полагая $u = \cos 3x$ и $v = x^2 - 17$, находим (см. пример 6):

$$\begin{aligned} u^{(n)} &= 3^n \cos \left(3x + n \frac{\pi}{2} \right), \\ v' &= 2x, \quad v'' = 2, \quad v''' = v^{(4)} = v^{(5)} = \dots = v^{(54)} = v^{(55)} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, все слагаемые в формуле Лейбница, содержащие производные функции v выше второго порядка, будут равны нулю. Вычисляем коэффициенты при функциях v , v' и v'' :

$$C_{55}^0 = 1, \quad C_{55}^1 = 55, \quad C_{55}^2 = \frac{55 \cdot 54}{2!} = 1485.$$

Подставляя найденные выражения в формулу Лейбница при $n = 55$, получаем:

$$\begin{aligned} y^{(55)} &= (uv)^{(55)} = C_{55}^0 u^{(55)} v + C_{55}^1 u^{(54)} v' + C_{55}^2 u^{(53)} v'' = \\ &= 1 \cdot 3^{55} \cos \left(3x + 55 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \cdot (x^2 - 17) + 55 \cdot 3^{54} \cos \left(3x + 54 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \cdot 2x + \\ &\quad + 1485 \cdot 3^{53} \cos \left(3x + 53 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \cdot 2 = \\ &= 3^{55} (x^2 - 17) \sin(3x) - 110x \cdot 3^{54} \cos(3x) - 2970 \cdot 3^{53} \sin(3x). \end{aligned}$$

3.4. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке x некоторого промежутка. Тогда её дифференциал dy вычисляется по формуле

$$dy = f'(x)dx$$

и называется дифференциалом первого порядка функции $f(x)$.

Дифференциал $d(dy)$ от дифференциала dy называется дифференциалом второго порядка функции $f(x)$ и обозначается d^2y , то есть

$$d^2y = f''(x)(dx)^2.$$

Аналогично, дифференциал $d(d^2y)$ от дифференциала d^2y называется дифференциалом третьего порядка функции $f(x)$ и обозначается d^3y . Вообще, дифференциал $d(d^{n-1}y)$ от дифференциала $d^{n-1}y$ называется дифференциалом n -го порядка (или n -м дифференциалом) функции $f(x)$ и обозначается d^ny .

Для n -го дифференциала функции $y(x)$ справедлива формула

$$d^ny = y^{(n)}(x)(dx)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Из последней формулы следует, что для любого натурального числа n справедливо равенство

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{(dx)^n}.$$

Замечание. Свойством инвариантности (см. пункт 2.3) обладает только первый дифференциал. Второй и последующие дифференциалы этим свойством не обладают.

Пример 10. Вычислить дифференциал d^3y функции $y = x^4 - 3x^2 + 4$.

РЕШЕНИЕ. Последовательно дифференцируя, получаем

$$y'(x) = 4x^3 - 6x, \quad y''(x) = 12x^2 - 6, \quad y'''(x) = 24x.$$

Следовательно,

$$d^3y = y'''(x)(dx)^3 = 24x(dx)^3.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти производную второго порядка от функции:

150. $y = e^{-x^2}$;

151. $y = \operatorname{tg} x$;

152. $y = \arcsin \frac{x}{2}$;

153. $y = \sqrt{1 + x^2}$;

154. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Найти производную третьего порядка от функции:

155. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$;

156. $y = xe^{-x}$;

157. $y = x^2 \sin x$;

158. $y = x^3 2^x$.

Найти производную n -го порядка от функции:

159. $y = e^x$;

160. $y = \ln x$;

161. $y = 3^x$;

162. $y = x^m$, m — натуральное;

- 163.** $y = \sin 3x$;
164. $y = \ln(1 + x)$;
165. $y = 2^{3x}$;
166. $y = \sin^2 x$;
167. $y = \cos^2 x$;
168. $y = \ln(2 - 3x)$;
169. $y = (4x + 1)^n$;
170. $y = x \cos x$, $n = 10$;
171. $y = (x^3 - 1)e^{5x}$, $n = 37$;
172. $y = x^2 \sin \frac{x}{3}$, $n = 73$;
173. $y = x^2 \ln x$, $n = 100$.

Найти дифференциал второго порядка от функции:

- 174.** $y = \operatorname{ctg} x$;
175. $y = \cos^2 x$;
176. $y = \ln(2x - 3)$.

Найти дифференциал третьего порядка от функции:

- 177.** $y = e^x \cos x$;
178. $y = x \ln x$.

Найти дифференциал n -го порядка от функции:

- 179.** $y = \sin x$;
180. $y = \cos x$;
181. $y = e^{\frac{x}{2}}$.

§4. Производная функции, заданной параметрически

4.1. Производная первого порядка

Пусть даны две функции

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

одной независимой переменной t , определённые и непрерывные на некотором промежутке. Предположим теперь, что функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ имеют производные, причём $x'(t) \neq 0$ на этом промежутке. Тогда y можно рассматривать как функцию, зависящую от переменной x посредством переменной t , называемой параметром. В этом случае говорят, что функция y от x задана параметрически.

Производная функции y по переменной x вычисляется по формуле

$$y'_x(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Замечание. Индекс x у функции y' означает, что производная функции y находится по переменной x . Если индекс у функции не указан, то производная находится по аргументу. Так как функции $x(t)$ и $y(t)$ зависят от параметра t , то $x'(t)$ и $y'(t)$ означают производные по переменной t .

Пример 1. Найти $y'_x(t)$ функции, заданной параметрически:

$$x(t) = \cos^4 2t, \quad y(t) = \sin^4 2t.$$

РЕШЕНИЕ. Находим производные $x'(t)$ и $y'(t)$:

$$x'(t) = 4 \cos^3 2t \cdot (-2 \sin 2t) = -8 \cos^3 2t \sin 2t,$$

$$y'(t) = 4 \sin^3 2t \cdot (2 \cos 2t) = 8 \sin^3 2t \cos 2t,$$

$$x'(t) \neq 0 \text{ при } t \neq \frac{\pi}{4}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

В точках, в которых $x'(t) \neq 0$, имеем

$$y'_x(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{8 \sin^3 2t \cos 2t}{-8 \cos^3 2t \sin 2t} = -\frac{\operatorname{tg}^3 2t}{\operatorname{tg} 2t} = -\operatorname{tg}^2 2t.$$

Итак, $y'_x(t) = -\operatorname{tg}^2 2t$.

4.2. Производная второго порядка

Вторая производная функции y (заданной параметрически) по переменной x находится по одной из следующих формул:

$$y''_{xx}(t) = (y'_x(t))'_x = \frac{(y'_x(t))'}{x'(t)};$$

$$y''_{xx}(t) = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}.$$

Замечание. Индекс xx у функции y'' означает, что берётся вторая производная функции y по переменной x . Там, где индекс не указан, производная ищется по аргументу, в данном случае по переменной t .

Пример 2. Найти $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$ функции, заданной параметрически:

$$x(t) = 7(t - \sin t), \quad y(t) = 7(1 - \cos t).$$

РЕШЕНИЕ. Находим производные $x'(t)$ и $y'(t)$:

$$x'(t) = 7(1 - \cos t), \quad y'(t) = 7 \sin t,$$

$$x'(t) \neq 0 \text{ при } t \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

В точках, в которых $x'(t) \neq 0$, имеем

$$\begin{aligned} y'_x(t) &= \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{7 \sin t}{7(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{(\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}) - (\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2})} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Для нахождения производной $y''_{xx}(t)$ по первой формуле вычислим сначала $(y'_x(t))'$:

$$(y'_x(t))' = \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right)' = -\frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}.$$

Теперь находим $y''_{xx}(t)$:

$$y''_{xx}(t) = \frac{(y'_x(t))'}{x'(t)} = \frac{-\frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}}{7(1 - \cos t)} = -\frac{1}{28 \sin^4 \frac{t}{2}}.$$

Итак, $y'_x(t) = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$, $y''_{xx}(t) = -\frac{1}{28 \sin^4 \frac{t}{2}}$.

Пример 3. Найти $y''_{xx}(t)$ функции, заданной параметрически:

$$x(t) = \ln(1 - t), \quad y(t) = (t + 1)^2.$$

РЕШЕНИЕ. Воспользуемся формулой:

$$y''_{xx}(t) = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}.$$

Для этого вычислим производные $x'(t)$, $x''(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$:

$$x'(t) = (\ln(1 - t))' = \frac{1}{1 - t}(1 - t)' = -\frac{1}{1 - t};$$

$$x''(t) = (x'(t))' = \left(-\frac{1}{1 - t} \right)' = -((1 - t)^{-1})' = (1 - t^{-2})(1 - t)' = -\frac{1}{(1 - t)^2};$$

$$y'(t) = ((t + 1)^2)' = 2(t + 1);$$

$$y''(t) = (y'(t))' = (2(t + 1))' = 2.$$

Подставляя найденные выражения в формулу, окончательно получаем:

$$\begin{aligned} y''_{xx}(t) &= \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{1-t}\right) - \left(-\frac{1}{(1-t)^2}\right) \cdot 2(t+1)}{\left(-\frac{1}{1-t}\right)^3} = \\ &= \left(2 \cdot \frac{1}{1-t} - \frac{1}{(1-t)^2} \cdot 2(t+1)\right) \cdot (1-t)^3 = \\ &= 2(1-t)^2 - 2(1-t)(t+1) = 4t^2 - 4t. \end{aligned}$$

Итак, $y''_{xx}(t) = 4t^2 - 4t$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$ функции, заданной параметрически:

182. $x(t) = 3 \cos t$, $y(t) = -2 \sin t$;

183. $x(t) = t^2$, $y(t) = \frac{t^3}{3} - t$;

184. $x(t) = e^{2t}$, $y(t) = e^{3t}$;

185. $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3 + t$;

186. $x(t) = 4 \cos^3 t$, $y(t) = 4 \sin^3 t$;

187. $x(t) = \frac{1-t}{(t+1)^2}$, $y(t) = \frac{t(1-t)}{(t+1)^2}$;

188. $x(t) = \frac{t}{t^3+1}$, $y(t) = \frac{t^2}{t^3+1}$.

§5. Производная функции, заданной неявно

Пусть функция $y = f(x)$ задана уравнением $F(x, y) = 0$. Это означает, что $F(x, f(x)) \equiv 0$ на некотором интервале (конечном или бесконечном). Тогда функция $y = f(x)$ называется неявно заданной функцией.

5.1. Производная первого порядка

Если функция $y = f(x)$ — дифференцируемая функция, заданная уравнением $F(x, y) = 0$, то её производную можно найти из уравнения

$$\frac{d}{dx} (F(x, f(x))) = 0.$$

Пример 1. Найти производную y' функции y , заданной неявно уравнением $x^2 + 2xy - y^2 = 4x$.

РЕШЕНИЕ. Пусть $y = f(x)$ — дифференцируемое решение данного уравнения. Тогда

$$x^2 + 2xf(x) - (f(x))^2 \equiv 4x \quad \text{или} \quad x^2 + 2xf(x) - (f(x))^2 - 4x \equiv 0$$

на некотором интервале. Поскольку все слагаемые в тождестве дифференцируемы, то после дифференцирования получаем

$$2x + 2f(x) + 2xf'(x) - 2f(x)f'(x) - 4 \equiv 0,$$

откуда

$$f'(x) = \frac{f(x) + x - 2}{f(x) - x}, \quad f(x) \neq x.$$

Итак, $y' = \frac{y+x-2}{y-x}$.

Пример 2. Найти y' из уравнения $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

РЕШЕНИЕ. Подставив в данное уравнение дифференцируемое решение $y = f(x)$, получим тождество

$$x^{\frac{2}{3}} + (f(x))^{\frac{2}{3}} \equiv 1,$$

дифференцируя которое, имеем

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}(f(x))^{-\frac{1}{3}}f'(x) \equiv 0.$$

Отсюда находим

$$f'(x) = -\sqrt[3]{\frac{f(x)}{x}}, \quad x \neq 0.$$

Итак, $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

5.2. Производная второго порядка

Пример 3. Найти производные y' и y'' функции y , заданной уравнением $x^2 + y^2 = 5xy^3$.

РЕШЕНИЕ. Пусть $y = f(x)$ — дважды дифференцируемое решение данного уравнения. Тогда дифференцируя тождество

$$x^2 + (f(x))^2 \equiv 5x(f(x))^3$$

по x , получаем

$$2x + 2f(x)f'(x) \equiv 5(f(x))^3 + 15xf^2(x)f'(x),$$

откуда

$$f'(x) = \frac{2x - 5f^3(x)}{15xf^2(x) - 2f(x)}, \quad \text{если } 15xf^2(x) - 2f(x) \neq 0.$$

Далее, по определению второй производной по правилу дифференцирования частного, имеем

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = \left(\frac{2x - 5f^3(x)}{15xf^2(x) - 2f(x)} \right)' = \\ &= \frac{(2x - 5f^3(x))'(15xf^2(x) - 2f(x)) - (2x - 5f^3(x))(15xf^2(x) - 2f(x))'}{(15xf^2(x) - 2f(x))^2} = \\ &= \frac{(20f^3(x) - 75xf^4(x) - 60x^2f(x) + 4x)f'(x) - 4f(x) + 75f^5(x)}{(15xf^2(x) - 2f(x))^2}. \end{aligned}$$

Подставляя значение $f'(x)$, окончательно получаем

$$f''(x) = \frac{1500xf^6(x) - 120x^3 + 150x^2f^3(x) - 250f^5(x)}{(15xf^2(x) - 2)^3f^2(x)}.$$

Итак,

$$y' = \frac{2x - 5y^3}{15xy^2 - 2y}, \quad y'' = \frac{1500xy^6 - 120x^3 + 150x^2y^3 - 250y^5}{(15xy - 2)^3y^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти y' из уравнения:

189. $x^2 + y^2 - xy = 0;$

190. $x^2 + xy + y^2 = 6;$

191. $x^2 + y^2 = a^2;$

192. $y^2 = 2px;$

193. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$

194. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$

195. $e^y - e^{-x} + xy = 0;$

196. $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0;$

197. $x = y + \operatorname{arctg} y;$

198. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$

199. $x^3 + y^3 - 3axy = 0;$

200. $\operatorname{ctg} y = xy;$

201. $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0;$

202. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2);$

203. $\operatorname{arctg} y = x + y;$

204. $x^2 = \frac{y-x}{x+2y}.$

Найти y'' из уравнения:

205. $x^2 + y^2 = a^2;$

$$206. ax + by - xy = c;$$

$$207. x^m y^n = 1;$$

$$208. x^2 - y^2 = a^2;$$

$$209. (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2;$$

$$210. \operatorname{arctg} y = x + y;$$

$$211. x^2 + xy + y^2 = a^2.$$

§6. Раскрытие неопределённостей. Правила Лопиталья

6.1. Раскрытие неопределённостей вида $\frac{0}{0}$. Первое правило Лопиталья

Будем говорить, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \rightarrow a$ есть неопределённость вида $\frac{0}{0}$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

Раскрыть неопределённость — значит вычислить предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, если он существует, или установить, что он не существует.

Сформулируем первое правило Лопиталья. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a , за исключением, быть может, самой точки a . Пусть, далее,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \text{и} \quad g'(x) \neq 0$$

в указанной окрестности точки a , за исключением, быть может, самой точки a . Тогда, если существует предел отношения производных $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём справедлива формула

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Формула (правило Лопиталья) остаётся верной и в случае, когда $x \rightarrow a-$, $x \rightarrow a+$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$.

Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2 - 16)'}{(x^2 - 5x + 4)'} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x}{2x - 5} = \frac{8}{3}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1.$$

Пример 3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(e-x) + x - 1} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\ln(e-x) + x - 1)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{-\frac{1}{e-x} + 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{2e}{e-1}. \end{aligned}$$

Замечание. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталья можно применить повторно. При этом получаем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Пример 4.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Напомним, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и по первому замечательному пределу.

Пример 5.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

6.2. Раскрытие неопределённостей вида $\frac{\infty}{\infty}$. Второе правило Лопиталья

Будем говорить, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \rightarrow a$ есть неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty, +\infty \text{ или } -\infty.$$

Сформулируем второе правило Лопиталья. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a , за исключением, быть может, самой точки a . Пусть, далее,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \text{ и } g'(x) \neq 0$$

в указанной окрестности точки a , за исключением, быть может, самой точки a . Тогда, если существует предел отношения производных $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём справедлива формула

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Приведённое правило раскрытия неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$ аналогично правилу раскрытия неопределённости вида $\frac{0}{0}$. Замечания, относящиеся к неопределённости вида $\frac{0}{0}$ остаются в силе и для всех других неопределённостей.

Пример 6.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 11}{5x^2 + 4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x^2 - 11)'}{(5x^2 + 4)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x}{10x} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}.$$

Пример 7.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Пример 8.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{100}}{e^x} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^{100})'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{100 \cdot x^{99}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(100 \cdot x^{99})'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{100 \cdot 99 \cdot x^{98}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot x^{97}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{100!}{e^x} = 0. \end{aligned}$$

6.3. Раскрытие неопределённостей вида $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$

Неопределённости вида $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$ можно свести к неопределённостям вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 9. Найти $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида $0 \cdot \infty$. Так как $x \ln x = \frac{\ln x}{1/x}$, то получаем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя второе правило Лопиталья, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = - \lim_{x \rightarrow 0+} x = 0.$$

Пример 10.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x &= [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1/2}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(x^{-1/2})'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{(-1/2)x^{-3/2}} = -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0. \end{aligned}$$

Пример 11. Найти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x \right)$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида $\infty - \infty$. Так как

$$\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x},$$

то при том же условии $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ получаем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Воспользовавшись первым правилом Лопиталья, получаем

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

Пример 12.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - \ln x}{(x-1) \ln x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + (x-1)\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x + x-1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

6.4. Раскрытие неопределённостей вида 0^0 , 1^∞ и ∞^0

Неопределённости вида 0^0 , 1^∞ и ∞^0 имеют место при рассмотрении функций вида $y = f(x)^{g(x)}$, если при $x \rightarrow a$ функция $f(x)$ стремится соответственно к 0, 1 и ∞ , а функция $g(x)$ — соответственно к 0, ∞ и 0.

Эти неопределённости с помощью тождества

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

сводятся к неопределённости вида $0 \cdot \infty$.

Пример 13. Найти $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида 0^0 . Так как $x^x = e^{x \ln x}$, то в показателе степени получена неопределённость вида $0 \cdot \infty$, которая рассмотрена в примере 9. Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = e^0 = 1.$$

Пример 14. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{e^x - 1 - x}}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида 1^∞ . Так как

$$(1 + x^2)^{\frac{1}{e^x - 1 - x}} = e^{\frac{\ln(1+x^2)}{e^x - 1 - x}},$$

то в показателе степени получена неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Применяя первое правило Лопиталья, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{e^x - 1 - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x/(1 + x^2)}{e^x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(e^x - 1)(1 + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^x(1 + x^2) + (e^x - 1)2x} = \frac{2}{1} = 2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{e^x - 1 - x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^x - 1 - x}} = e^2.$$

Пример 15. Найти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2 \cos x}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида ∞^0 . Так как

$$(\operatorname{tg} x)^{2 \cos x} = e^{2 \cos x \ln \operatorname{tg} x} = e^{\frac{2 \ln \operatorname{tg} x}{1/(\cos x)}},$$

то в показателе степени получена неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя второе правило Лопиталья, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \ln \operatorname{tg} x}{1/(\cos x)} &= 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{1/(\cos x)} = 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x)} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2 \cos x} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2 \cos x \ln \operatorname{tg} x} = e^0 = 1.$$

В следующем примере перейдём к другой неопределённости с помощью операции логарифмирования.

Пример 16. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределённость вида ∞^0 . Положим $y(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ и прологарифмируем обе части полученного равенства:

$$\ln y(x) = \ln \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \sin x \ln \frac{1}{x} = -\sin x \ln x.$$

Так как $x \rightarrow 0$, то получили неопределённость вида $0 \cdot \infty$. Преобразуем её к неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$, а затем применим второе правило Лопиталья и воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln y(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (-\sin x \ln x) = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln y(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln y(x)} = e^0 = 1.$$

Итак, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти предел:

212. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x};$

213. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 5x};$

214. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{x^3};$

215. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x};$

216. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x};$

217. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - 1 + \cos 3x}{e^x - e^{-x}};$

218. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin x - x};$

219. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3};$

220. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x};$

221. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1};$

222. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x};$

223. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - 2x}{x^3};$

224. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x} - e^{\sin x}}{x};$

225. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{e^{3x}};$

226. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$;
227. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^{2x}}$;
228. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 5x}{\ln \sin 2x}$;
229. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x+\sin x}$;
230. $\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{tg} x \ln x$;
231. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2 \sin \frac{x}{2}}{x+1}$;
232. $\lim_{x \rightarrow 1+} \ln x \ln(x-1)$;
233. $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{\sin x}$;
234. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(1+x)}{\log_3(1+2x)}$;
235. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \operatorname{tg} x$;
236. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$;
237. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left((x+3)e^{\frac{1}{x}} - x \right)$;
238. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{1}{\ln x} \right)$;
239. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$;
240. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$;
241. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)+x^2}{(1+x)^5-1+x^2}$;
242. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}-1+x-\frac{x^2}{2}}{e^{x^3}-1}$;
243. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{9}{4}} \left(\sqrt[4]{x^3+1} - \sqrt[4]{x^3-1} \right)$;
244. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)$;
245. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + x \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right)$;
246. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$;
247. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x + \frac{x^2}{2} - 1}$;
248. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1 - x \ln 2}{(1-x)^{10} - 1 + 10x}$;
249. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right)$;
250. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \ln^2(1+x)}{e^{x^2} - 1}$;
251. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin 2x)^{\cos x}$;

$$252. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{3}{1+\ln x}};$$

$$253. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}};$$

$$254. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\ln x};$$

$$255. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x)^x;$$

$$256. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x};$$

$$257. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$258. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x\right)^{\frac{1}{x}};$$

$$259. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (2 \sin x)^{\operatorname{ctg} 6x}.$$

Приложение

Таблица производных			
	Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Примечание
1	c	0	c — число
2	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	α — число
3	e^x	e^x	
4	a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$
5	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
6	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1$
7	$\sin x$	$\cos x$	
8	$\cos x$	$-\sin x$	
9	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
10	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	
11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
12	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
13	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
14	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	
15	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	
16	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	
17	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	
18	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	

См. также пункт 1.2.

ОТВЕТЫ

1. $2x$. 2. $3x^2$. 3. $4x^3$. 4. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 5. $-\frac{2}{x^3}$. 6. $-\frac{3}{x^4}$. 7. $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.
 8. $2 \cos 2x$. 9. $-\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$. 10. $\frac{1}{\cos^2 x}$. 11. $-\frac{2}{(2x+1)^2}$. 12. $-\frac{3}{2\sqrt{1+3x}}$.
 13. $-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. 14. $2(2x^2 + 3x - 1)$. 15. $49x^6 + 6x - 4$. 16. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x}$.
 17. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}} - \frac{10}{x^3} + \frac{9}{x^4}$. 18. $20x^4 - 3 \cos x - \frac{5}{\sin^2 x}$. 19. $\frac{3}{2\sqrt{x}} - 4 \sin x - \frac{2}{\cos^2 x}$.
 20. $8x + \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} - \frac{2}{x^3} + \cos x - \sin x + \frac{1}{x}$. 21. $\frac{3}{8\sqrt[8]{x^5}} - 24x^5 + \frac{5}{x} + 7 \sin x - \frac{4 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 2x}$.
 22. $\frac{\ln 24}{x \ln 2 \cdot \ln 3}$. 23. $4e^x + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 24. $e^x - \frac{1}{2 \cos^2 x} + x^3$.
 25. $5^x \ln 5 + 6^x \ln 6 - 7^{-x} \ln 7$. 26. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$. 27. $\frac{2}{x} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right)$.
 28. $\frac{4}{\sin^2 2x}$. 29. $\frac{2}{1+x^2}$. 30. $\sin x + x \cos x$. 31. $\frac{x(\sin 2x+x)}{\cos^2 x}$. 32. $\frac{\ln x+7}{7\sqrt[7]{x^5}}$.
 33. $\arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 34. $\frac{\operatorname{arccotg} x}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}$. 35. $\frac{x(2 \ln x+1)}{\ln 3}$. 36. $\frac{4x}{(x^2+1)^2}$.
 37. $\frac{\sin x - x^2 + x \cos x (\sin x - \ln x)}{x \sin^2 x}$. 38. $-\frac{2+\sin x}{(1+2 \sin x)^2}$. 39. $\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$. 40. $-\frac{4x+\sin 2x}{4x\sqrt{x} \sin^2 x}$.
 41. $\frac{(1+x^2)(\sin x \cos x+x)-x^2 \sin 2x}{(1+x^2)^2 \cos^2 x}$. 42. $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$. 43. 1, 0, 4. 44. $\pm \frac{33}{8}$.
 45. $-1, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{25}$. 46. $-\frac{\ln 10}{2}$. 47. 0, $2e^2, -e^{-4}$. 48. 1, 2, 0, -1 .
 49. $3 \cos 3x$. 50. $(2x+5) \cos(x^2+5x+2)$. 51. $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 52. $-\frac{5 \sin x}{2\sqrt{1+5 \cos x}}$.
 53. $\frac{2 \sin^2 x}{\sqrt{2x-\sin 2x}}$. 54. $\sin 2x$. 55. $3 \sin^2 x \cos x$. 56. $-100 \cos^{99} x \sin x$.
 57. $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$. 58. $\frac{2x}{\cos^2(x^2+3)}$. 59. $-\operatorname{tg} x$. 60. $\frac{10}{\sin 10x}$. 61. $-\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.
 62. $\frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$. 63. $\frac{2x-3}{x^2-3x+7}$. 64. $\frac{2(x+1)}{x(x+2)}$. 65. $\frac{1}{x^2+5}$. 66. $\frac{1}{3+x^2}$. 67. $\frac{x}{\sqrt{3-x^4}}$.
 68. $\frac{1}{x^2-9}$. 69. $\frac{2}{x(1-x^2)}$. 70. $\frac{2}{1-4x^2}$. 71. $\sqrt{1-x^2}$. 72. $\operatorname{arctg} x$.
 73. $e^x \cos x$. 74. $\operatorname{arctg} \sqrt{2x-1}$. 75. $3 \operatorname{tg}^4 x$. 76. $3x^2 \sin 2x^3$.
 77. $-\frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\sin^4 \frac{\pi}{3}}$. 78. $\frac{5 \sin 2x}{8 \cos^{11} 2x}$. 79. $-\sin 4x$. 80. $\frac{4 \cos 2x}{(1-\sin 2x)^2}$. 81. $-\frac{2 \cos^2 x}{\sin^3 x}$.
 82. $3 \cdot 2^{3x} \ln 2 + 5x^4 - 2xe^{-x^2} - \frac{1}{x^2}$. 83. $\frac{e^{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$. 84. $xe^{-x}(2-x)$.
 85. $e^{-x^2}(1-2x^2-4x)$. 86. $\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}} \left(\cos \frac{x}{3} - \sin \frac{x}{3} \right)$. 87. $e^{\frac{1}{\cos x}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}$. 88. $-\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{x \ln^2 x}$.
 89. $10^{3-\sin^3 2x} \ln 10 \cdot (-3 \sin 2x \sin 4x)$. 90. $2^x \ln 2 \cos 2^x$. 91. $-\frac{4}{(e^x-e^{-x})^2}$.
 92. $\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}$. 93. $\frac{2}{e^{4x}+1}$. 94. $\frac{\operatorname{ctg} x \ln \cos x + \operatorname{tg} x \ln \sin x}{(\ln \cos x)^2}$. 95. $-\frac{7 \operatorname{tg} 7x}{\ln 5}$. 96. $-\frac{\operatorname{tg} \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x} \ln 7}$.
 97. $\frac{2e\sqrt[7]{x^2}}{7\sqrt[7]{x^5}}$. 98. $-\frac{1}{2\sqrt{x(x-1)}}$. 99. $-\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$. 100. $\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. 101. $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
 102. $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$. 103. $-\frac{1}{x-4x^2}$. 104. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\sin^2 x}}$. 105. $\frac{4e^{4x}}{\sqrt{1-e^{8x}}}$. 106. $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.
 107. $\frac{1}{2x\sqrt{6x-1}}$. 108. $\frac{4e^2x}{1-e^{8x}}$. 109. $\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x^2+1}$. 110. $-\frac{2}{\sqrt{1-4x^2} \arccos 2x}$.

111. $\frac{5}{(5x+3)(1+\ln^2(5x+3))}$. 112. $-\frac{3}{x^2+9}$. 113. $\frac{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{1+x^2}$. 114. $\frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$.
 115. $-\frac{\sin x \cos(\cos x)}{\cos^2(\sin(\cos x))}$. 116. $\frac{xe^{x^2} \operatorname{ctg} 3x}{\sin^2 3x}(\sin 6x - 3x)$. 117. $-\frac{1}{2} \operatorname{ctg}(\operatorname{tg} e^{-\frac{x}{2}})$. $\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\cos^2(e^{-\frac{x}{2}})}$.
 118. $5 \operatorname{ctg} x \cdot \ln^4 \sin x$. 119. $\frac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}}$. 120. $\frac{1}{20} \frac{\operatorname{ctg} \frac{x+3}{4}}{\sqrt[5]{\ln^4 \sin \frac{x+3}{4}}}$.
 121. $\frac{e^{\sqrt{1+\ln x}}}{2x\sqrt{1+\ln x}}$. 122. $\frac{e^{5x}}{(1+e^{10x})\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^4 e^{5x}}}$. 123. $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-\arccos^2 x}}$. 124. $\frac{1}{2(1+x^2)}$.
 125. $\frac{1}{1+x+x^2}$. 126. $\frac{9(x^2+1)}{x^4-9}$. 127. $\frac{4x-5}{x^2+5}$. 128. $\operatorname{arctg} x$. 129. $\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$.
 130. $\frac{1}{x} + \operatorname{ctg} x - \frac{x}{1-x^2}$. 131. $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$. 132. $x^{\sin x} \cos x \ln x + x^{\sin x-1} \sin x$.
 133. $(\operatorname{tg} x)^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} \right)$. 134. $(\cos x)^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right)$.
 135. $5x^4 dx$. 136. $\frac{dx}{\cos^2 x}$. 137. $3 \sin 2x \sin 4x dx$. 138. $\frac{dx}{x}$. 139. $\frac{\operatorname{ctg} \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$.
 140. $-\frac{\operatorname{tg} x \cdot e^{-\frac{1}{\cos x}}}{\cos x} dx$. 141. $-2x \cdot 2^{-x^2} \ln 2 dx$. 142. $4 dx$. 143. $3 dx$.
 144. $-\frac{3}{\sqrt{10}} dx$. 145. 0 . 146. $-dx$. 147. $-2e dx$. 148. $\frac{1}{4} dx$.
 149. $\frac{dx}{6\sqrt{11}}$. 150. $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. 151. $\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$. 152. $\frac{x}{\sqrt[3]{(4-x^2)^2}}$. 153. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.
 154. $-\frac{4}{(2x-3)^2}$. 155. $\frac{4(3x^2-4)}{(4+x^2)^3}$. 156. $e^{-x}(3-x)$. 157. $(6-x^2) \cos x - 6x \sin x$.
 158. $2^x(x^3 \ln^3 2 + 9x^2 \ln^2 2 + 18x \ln 2 + 6)$. 159. e^x . 160. $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.
 161. $3^x(\ln 3)^n$. 162. $m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)x^{m-n}$ при $m \geq n$ и 0 при $m < n$. 163. $3^n \sin(3x + n\frac{\pi}{2})$. 164. $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. 165. $2^{3x}(3 \ln 2)^n$.
 166. $-2^{n-1} \cos(2x + n\frac{\pi}{2})$. 167. $2^{n-1} \cos(2x + n\frac{\pi}{2})$. 168. $-\frac{(n-1)!3^n}{(2-3x)^n}$. 169. $4^n n!$.
 170. $-x \cos x - 10 \sin x$. 171. $(5^{37}(x^3-1) + 111 \cdot 5^{36}x^2 + 3996 \cdot 5^{35}x + 46620 \cdot 5^{34})e^{5x}$.
 172. $\frac{x^2}{373} \cos \frac{x}{3} + \frac{146x}{373} \sin \frac{x}{3} - \frac{584}{369} \cos \frac{x}{3}$. 173. $-\frac{2 \cdot 97!}{x^{98}}$. 174. $\frac{2 \cos x}{\sin^3 x} (dx)^2$.
 175. $-2 \cos 2x (dx)^2$. 176. $\frac{2x}{(1+x^2)^2} (dx)^2$. 177. $-2e^x(\cos x + \sin x)(dx)^3$.
 178. $-\frac{1}{x^2} (dx)^3$. 179. $\sin(x + n\frac{\pi}{2})(dx)^n$. 180. $\cos(x + n\frac{\pi}{2})(dx)^n$.
 181. $\frac{1}{2^n} e^{\frac{x}{2}} (dx)^n$. 182. $\frac{2}{3} \operatorname{ctg} t, \frac{2}{9 \sin^3 t}$. 183. $\frac{t^2-1}{2t}, \frac{1+t^2}{4t^3}$. 184. $\frac{3}{2} e^t, \frac{3}{4e^t}$.
 185. $\frac{3t^2+1}{2t}, \frac{3t^2-1}{4t^3}$. 186. $-\operatorname{tg} t, \frac{1}{12 \cos^4 t \sin t}$. 187. $\frac{1-3t}{t-3}, \frac{8(t+1)^3}{(t-3)^3}$. 188. $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$.
 $\frac{2(t^3+1)^4}{(1-2t^3)^3}$. 189. $\frac{2x-y}{x-2y}$. 190. $-\frac{2x+y}{x+2y}$. 191. $-\frac{x}{y}$. 192. $\frac{p}{y}$. 193. $\frac{b^2x}{a^2y}$.
 194. $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. 195. $\frac{e^{-x}+y}{e^y+x}$. 196. $-\frac{e^x \sin y + e^{-y} \sin x}{e^x \cos y + e^{-y} \cos x}$. 197. $\frac{1}{y^2} + 1$. 198. $-\frac{b^2x}{a^2y}$.
 199. $\frac{x^2-ay}{ax-y^2}$. 200. $-\frac{y \sin^2 y}{1+x \sin^2 y}$. 201. $\frac{2x-ye^{xy}}{3y^2+xe^{xy}}$. 202. $\frac{x+y}{x-y}$. 203. $-\frac{1+y^2}{y^2}$.
 204. $\frac{2(x+2y)^2}{3} + \frac{y}{x}$. 205. $-\frac{a^2}{y^3}$. 206. $\frac{2(y-a)}{(x-b)^2}$. 207. $\frac{m(m+n)y}{n^2x^2}$. 208. $-\frac{a^2}{y^3}$.
 209. $-\frac{R^2}{(y-\beta)^3}$. 210. $-\frac{2(1+y^2)}{y^5}$. 211. $-\frac{6a^2}{(x+2y)^3}$. 212. $\frac{7}{3}$. 213. $-\frac{7}{5}$.
 214. $\frac{9}{2}$. 215. 3 . 216. $-\frac{1}{2}$. 217. $\frac{1}{2}$. 218. -2 . 219. $\frac{1}{3}$. 220. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
 221. $\frac{3}{2}$. 222. 2 . 223. $\frac{1}{6}$. 224. -4 . 225. 0 . 226. 0 . 227. 0 .

-
- 228.** 1. **229.** 2. **230.** 0. **231.** 3. **232.** 0. **233.** 1. **234.** $\log_2 3$.
235. 2. **236.** e . **237.** 4. **238.** 1. **239.** $\frac{1}{2}$. **240.** $\frac{1}{6}$. **241.** $-\frac{1}{5}$.
242. $-\frac{1}{6}$. **243.** $\frac{1}{2}$. **244.** $\frac{1}{2}$. **245.** 0. **246.** $\frac{1}{128}$. **247.** 1. **248.** $\frac{\ln^2 2}{90}$.
249. $\frac{2}{3}$. **250.** 0. **251.** 1. **252.** e^3 . **253.** 1. **254.** 1. **255.** 1.
256. $e^{-\frac{1}{6}}$. **257.** $\sqrt[3]{e}$. **258.** $e^{-\frac{2}{\pi}}$. **259.** $e^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$.